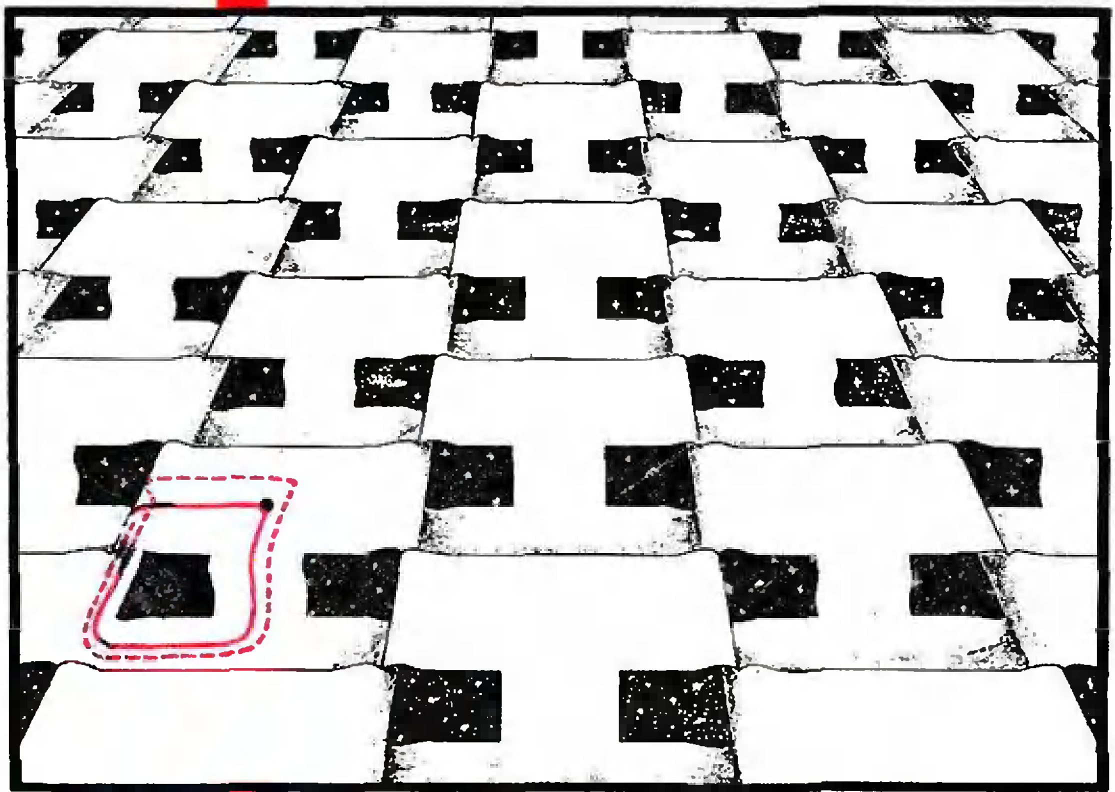
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Односторонний ковер

1992

Квант

3 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Шелдон Ли Глэшоу — известный американский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии 1979 года за создание (совместно с С. Вайнбергом и А. Саламом) теории, объединяющей слабое и электромагнитное взаимодействия. Ш. Глэшоу — один из инициаторов появления советско-американского журнала «Quantum», созданного на базе журнала «Квант» и выходящего в США с начала 1990 года. И один из организаторов и лекторов летних советско-американских школ, в которых принимали участие и наши читатели — победители конкурсов «Кванта». Статья «Элементарные частицы» написана Ш. Глэшоу для американских школьников — читателей журнала «Quantum». Публикуя перевод этой статьи, мы надеемся, что она будет интересна и советским школьникам.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

(Ловля рыбки Хиггса, охота на топ-кварка...)

Ш. ГЛЭШОУ

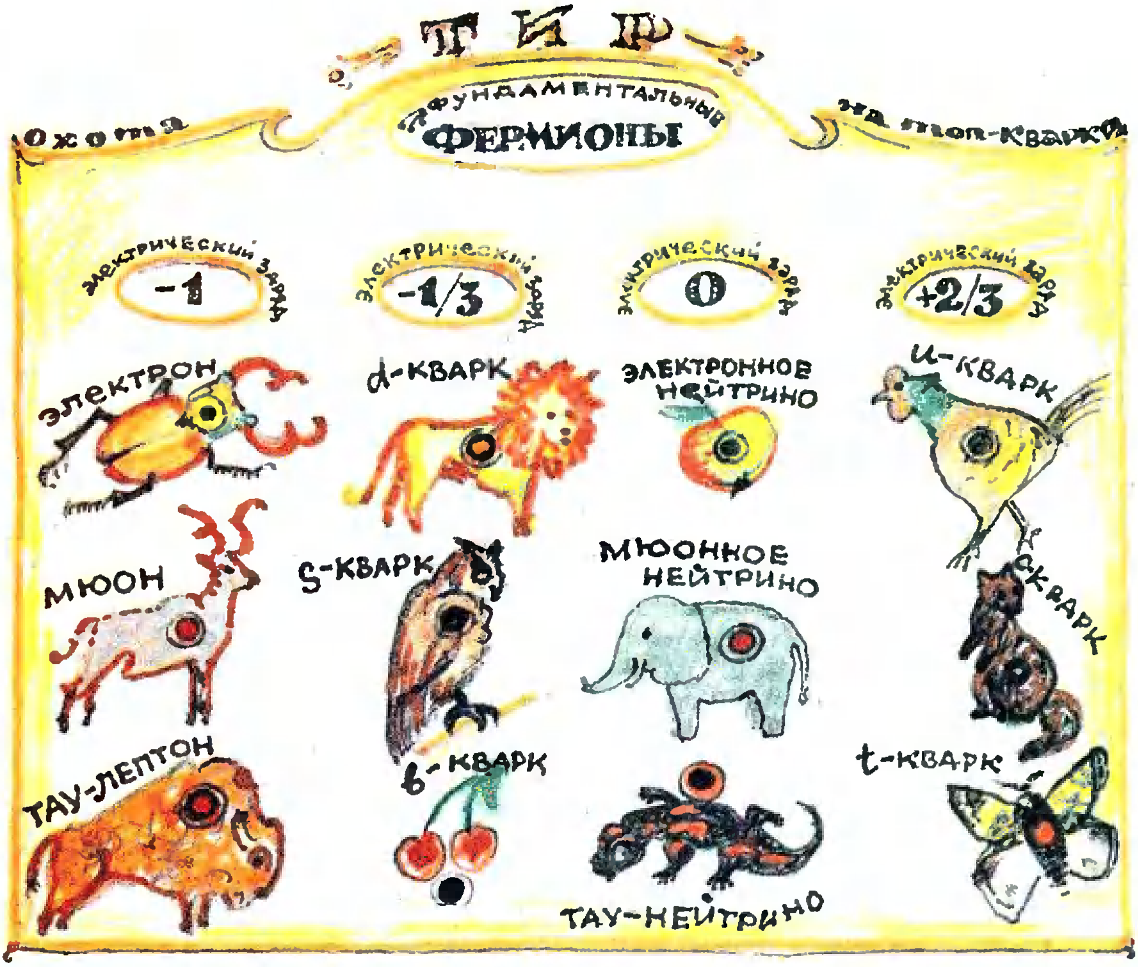
Масса, спин и античастица. Квантовая механика и теория относительности утверждают, что каждая элементарная частица характеризуется неотрицательной массой и неотрицательным целым или полуцелым *спином* и что для каждой частицы существует *античастица* с такими же массой и спином, но с противоположным электрическим зарядом. Частицы, масса которых отлична от нуля, движутся медленнее света, и их можно затормозить, в то время как частицы с нулевой массой (такие, как фотон и гравитон) движутся со скоростью света по отношению ко всем наблюдателям. Спин есть мера собственного момента импульса частицы. Если частица с массой имеет спин s, то она может находиться в любом из $(2s+1)$ квантовых состояний, отличающихся проекцией спина. Античастица электрона, называемая *позитроном*, впервые была обнаружена в 1932 году в космических лучах. *Антипротоны* были впервые получены и зарегистрированы на бэватроне в Беркли в 1955 году. Фотоны совпадают со своими собственными античастицами.

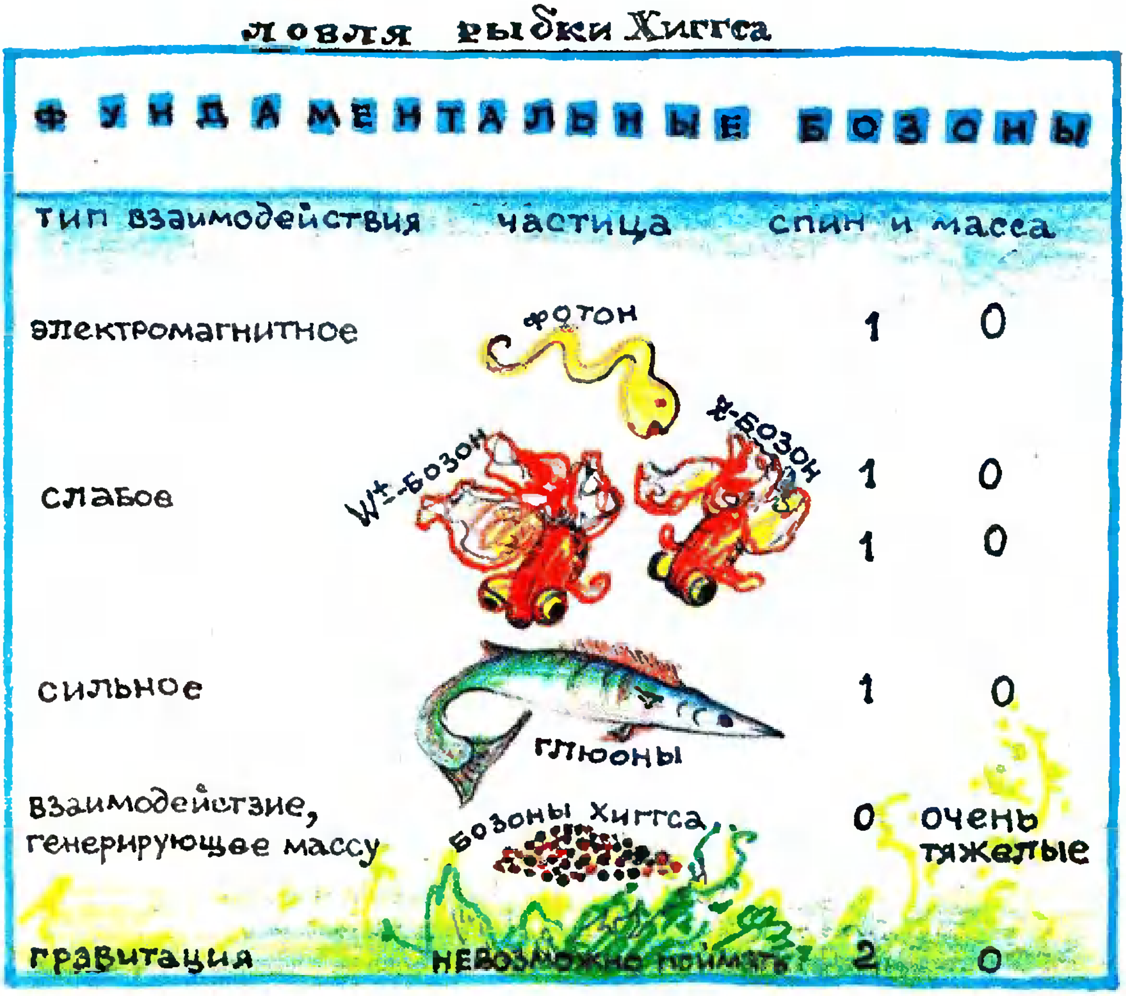
При контакте частицы со своей античастицей они аннигилируют. Все вещество на Земле (и почти все вещество во Вселенной) состоит из частиц, а не античастиц. В противном случае не было бы ни нас с вами, ни этого рассказа.

Фермионы и бозоны. Частицы с полуцелым спином (например, электрон со спином 1/2) подчиняются статистике Ферми — Дирака и называются *фермионами*. Два одинаковых фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии (принцип запрета Паули). Частицы с целым спином (например, фотон) подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Многие из *бозонов* могут (и, в известном смысле, «любят») собираться в одном и том же квантовом состоянии, что является принципиальной основой работы лазеров.

Фундаментальные фермионы — кварки и лептоны. Наш перечень таких частиц содержит двенадцать частиц со спином 1/2: шесть *кварков* и шесть *лептонов*. Кварки были придуманы М. Гелл-Манном и Г. Цвейном в 1963 году. *u*-, *c*-, *t*-кварки (от слов «up» — вверх, «charmed» — очарованный, «top» — верхний) несут электрический заряд, равный 2/3, в то время как *d*-, *s*-, *b*-кварки (от слов «down» — вниз, «strange» — странный, «botton» — нижний) несут заряд, равный —1/3. Отдельный кварк не может быть изолирован от *адрона* [см. ниже.— *Ред.*], частью которого он является. Таким образом, кварки нельзя рассматривать как полноправные частицы. Слово лептон происходит от греческого «лептос», означающего «маленький» или «легкий», и было введено в 1948 году Л. Розенфельдом для обозначения любого фермиона небольшой массы, подобного электрону или нейтрино. В настоящее время лептоны включают все шесть известных фермионов, на которые не распространяется сильное ядерное взаимодействие. Три из них имеют электрический заряд: электрон, мюон (примерно в 200 раз тяжелее) и тау-лептон (еще в 17 раз тяжелее). Каждому из них соответствует свой сорт нейтрино, всего получается шесть лептонов. Нейтрино очень легкие; возможно, они имеют нулевую массу. Недавние эксперименты позволяют предположить, что существует не больше трех разновидностей нейтрино. Это означало бы, что наш список фундаментальных ферминов является полным. Так ли это на самом деле, увидим!

Фундаментальные бозоны. Эти частицы осуществляют связь между фундаментальными фермионами. Электромагнитное взаимодействие является результатом того, что заряженные частицы обмениваются *фотонами* — частицами света, имеющими нулевую массу. Сильное ядерное взаимодействие возникает, когда кварки обмениваются *глюонами* с нулевой массой. Слабое взаимодействие — это результат обмена тяжелыми W- или Z-бозонами между фундаментальными фермионами. Можно думать, что гравитация обусловлена





обменом *гравитонами* с нулевой массой. Глюоны, подобно кваркам, оказываются «запертыми»: их нельзя наблюдать в свободном состоянии. Заряженные W- и нейтральные Z-бозоны были открыты в 1983 году в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРНе). Последний из фундаментальных бозонов в нашем «зоопарке» — это бозон Хиггса — ускользающая и все еще гипотетическая частица, ответственная за возникновение массы у элементарных частиц. Мы надеемся обнаружить ее на суперускорителе на встречных пучках, строящемся в Техасе.

Адроны. В 1962 году советский физик Л. Окунь воспользовался греческим словом «адрос», означающим «толстый и тяжелый», выбирая название для всякой внешне элементарной частицы, которая подобно протону (но не электрону) принимает участие в сильном ядерном взаимодействии. Сейчас адроном называют любую частицу, составленную из кварков. Три кварка, соединенные вместе, образуют *барион*, кварк, связанный с антикварком, образует *мезон*, а три антикварка образуют *антибарион*. Мы перечислили все известные способы, с помощью которых кварки, соединяясь, образуют адроны. Барионы и антибарионы, поскольку они состоят из нечетного числа фермионов, сами являются фермионами. Напротив, мезоны — это бозоны.

Нуклоны. Это слово применяется с 1941 года для обозначения и нейтронов, и протонов. Атомное ядро с атомным номером Z содержит A нуклонов, из них Z протонов. Ядра с одинаковыми Z, но разными A называют *изотопами*. Нуклоны — это фермионы. Они — самые легкие барионы, состоящие исключительно из u- и d-кварков: два u- и один d-кварк образуют протон, а два d-кварка и один u-кварк — нейтрон. Около 99,98 % массы обычного вещества состоит из нуклонов. Остальное — это электроны.

Пионы и мюоны. В начале 1930-х годов Хидеки Юкава предположил, что ядерные силы возникают в результате того, что нуклоны обмениваются гипотетическими элементарными частицами. Он дал своим частицам имя «мезотроны» (вскоре укоротившееся до «мезоны»), поскольку они были по массе промежуточными между электронами и нуклонами. Частицы с такими массами были найдены в конце 30-х годов, но оказались мюонами. Частицы Юкавы были, наконец, открыты в 1947 году. Как и мюоны, они впервые наблюдались в космических лучах. Много других видов мёзонов было открыто с тех пор. Мезоны Юкавы стали известны как π-мезоны, или пионы. Они не являются элементарными частицами: как и все мезоны, они состоят из кварка и антикварка.

Топ-кварк. Наша теория требует, чтобы такая частица существовала и «весила» не более двухсот протонов. Экспериментаторы еще не нашли ее. Они уверены, что она должна быть тяжелее, чем сто протонов, иначе бы ее уже открыли. Эта щель медленно сужается: я предсказываю, что «топ» (последний из кварков!) будет найден в течение двух лет физиками, работающими в Ферми-лаборатории на протон-антипротонном ускорителе на встречных пучках.

Нейтрино. Нейтрино, полученные в ядерном реакторе, впервые наблюдались в 1953 году. С тех пор физики наблюдали нейтрино, полученные на ускорителях, в космических лучах, в ядерной печи Солнца и при взрыве последней «соседней» сверхновой в 1987 году (она взорвалась «всего лишь» на расстоянии 160 тысяч световых лет). Некоторые ученые полагают, что нейтрино имеют массу и что загадочное черное вещество Вселенной состоит из сгустков нейтрино, оставшихся от Большого Взрыва.

Перевод с английского И. Вахуриной

Нам пишут

Почему нить все-таки будет двигаться?

Наверное, многие знают, как иногда бывает непросто в хорошо известном явлении заметить что-то новое. Рассмотрим с этой точки зрения одну задачу из школьного курса физики (см. «Физику-9», с. 106).

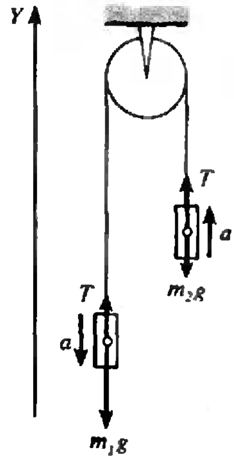
Задача. *Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$. Считая, что массы нити и блока малы сравнительно с массами m_1 и m_2, найдите ускорение грузов.*

Решение этой задачи общеизвестно. Направим ось Y вертикально вверх и обозначим через m_1g, m_2g и $\vec{T}$ силы тяжести грузов и натяжение нити (см. рисунок). Так как $m_1 > m_2$, система грузов движется в направлении против часовой стрелки с ускорением a. В соответствии со вторым законом Ньютона, запишем уравнения движения каждого груза в проекциях на выбранную ось:

$$-m_1a = -m_1g + T,$$
$$m_2a = -m_2g + T.$$

Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g.$$



И окончательно находим

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

(Окончание см. на с. 43)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧИСЛА 30

Г. РАДЕМАХЕР,
О. ТЕПЛИЦ

Эта статья представляет собой незначительно переработанную главу из замечательной книги известных немецких математиков Ганса Радемахера и Отто Теплица «Числа и фигуры», вышедшей в свет в 1930 году.
В нашей стране она была переведена, вышла тремя изданиями в 1936, 1938 и 1962 годах и сейчас является библиографической редкостью.
В свое время эта книга, состоящая из 27 популярных очерков, посвященных различным вопросам математики, оказала большое влияние на несколько поколений школьников, увлеченных математикой, и помогла многим из них стать профессиональными математиками.

Постановка задачи

Как 10, так и 21 — числа не простые, но среди множителей, на которые разлагаются эти числа, нет ни одного такого, который содержался бы одновременно в обоих этих числах. Поэтому числа 10 и 21 называют взаимно простыми. Числа 6 и 10 нельзя назвать взаимно простыми, так как у них есть общий множитель 2.

Число 10 — взаимно простое со следующими меньшими его числами в пределах от 1 до 9: 3, 7, 9; из них 9 — число не простое, хотя оно и взаимно простое с 10. Иначе обстоит дело с числом 12. Здесь из ряда чисел в пределах от 1 до 11 взаимно простыми с 12 являются: 5, 7, 11, т. е. только простые числа.

Кроме числа 12, тем же самым свойством, как это легко обнаружить путем несложной проверки, обладают и числа 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Путем проб никаких других чисел этого типа обнаружить не удается. Возникает вопрос: является ли 30 последним числом, обладающим тем свойством, что все взаимно простые с ним и меньшие его числа являются простыми? Докажем, что это именно так.

Начнем с одного чрезвычайно простого замечания. Начиная с 4, любое число N рассматриваемого вида должно делиться на 2, ибо если бы оно было нечетным, оно было бы взаимно простым с числом 4, не являющимся простым. Точно так же число N, большее 9, должно делиться по тем же самым соображениям на 3, а так как оно, сверх того, делится на 2, значит, оно делится и на $2\cdot3=6$. Продолжая рассуждения дальше, получим такую таблицу:

Начиная с 4, число N должно делиться на	$2=2$
Начиная с 9, число N должно делиться на	$2\cdot3=6$
Начиная с 25, число N должно делиться на	$2\cdot3\cdot5=30$
Начиная с 49, число N должно делиться на	$2\cdot3\cdot5\cdot7=210$
Начиная с 121, число N должно делиться на	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310.$

Между 4 и 9 остается исследовать только 4, 6, 8, между 9 и 25 — лишь 12, 18, 24, между 25 и 49 — только 30 (60 — ближайшее следующее число, делящееся на 30, уже превышает 49), между 49 и 121 — ни одного числа, так как 210 уже больше 121 (30 было еще меньше 49). Подобным же образом можно было бы продолжить наши рассуждения дальше, и мы немедленно доказали бы высказанное выше утверждение, если бы знали, что обнаруженная нами закономерность останется в силе и в дальнейшем, т. е. если 13^2 будет меньше произведения $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$, если 17^2 будет меньше произведения $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$, и вообще, если при $n>4$

$$p_{n+1}^2<p_1p_2p_3\ldots p_n, \qquad (1)$$

где через p_1, p_2, p_3, ... обозначены последовательные простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Бесконечность количества простых чисел

Идею доказательства неравенства (1) нам подскажет замечательное рассуждение Евклида, позволяющее доказать, что *существует бесконечно много простых чисел*.

Очевидно, достаточно убедиться в том, что для любых первых n простых чисел $p_1=2$, $p_2=3$, ..., p_n существует простое число p, большее каждого из них.

Рассмотрим число $M=p_1p_2\ldots p_n-1$. Это число больше любого из чисел p_i и не делится ни на одно из них. Поэтому либо M — само просто, либо делится на некоторое простое число p, не совпадающее ни с одним из чисел p_i и, следовательно, большее каждого из них. Пусть p_{n+1} — наименьшее из всех простых чисел, больших p_1, p_2, ..., p_n.

Из сказанного выше вытекает, что число p_{n+1} удовлетворяет неравенству

$$p_{n+1}\leqslant M<p_1p_2\ldots p_n.$$

Это неравенство, конечно, значительно слабее того, что нам нужно доказать.

Упражнение 1. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида а) $4n+3$; б) $6n+5$.

Применение теоремы Чебышёва

Доказывая неравенство (1), мы тем самым решаем поставленную нами проблему. Поэтому мы и займемся сейчас лишь доказательством соотношения (1), которое и само по себе достаточно интересно.

В действительности удовлетворяется гораздо большее, чем требует неравенство (1): ближайшее простое число, следующее за $p_5=11$, не только меньше чем

$$\sqrt{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11}=\sqrt{2310}=48{,}06\ldots,$$

оно равно всего-навсего 13, и т. д., но при чрезвычайных неправильностях ряда простых чисел необычайно трудно высказать что-либо общее для всего ряда.

Чтобы вы могли себе представить, насколько нерегулярно расположены простые числа в натуральном ряду чисел, отметим, что, с одной стороны, бывают простые числа, такие как 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19 ..., разность которых равна двум. Такие пары называются простыми близнецами. Кстати, до сих пор неизвестно, конечно или бесконечно количество этих пар. С другой стороны, имеются сколь угодно длинные участки натурального ряда, вообще не содержащие простых чисел.

Упражнение 2. Докажите, что для любого натурального числа N существуют N последовательных составных чисел. Указание. Рассмотрите числа $(N+1)!+2$, $(N+1)!+3$, ..., $(N+1)!+N+1$.

Весьма сложными вспомогательными средствами П. Л. Чебышёв доказал, что следующее за p_n простое число $p_{n+1}<2p_n$. Это, конечно, значительно сильнее того, что утверждается соотношением (1). Но возникает вопрос, нельзя ли значительно более слабое неравенство (1) доказать просто и притом элементарными средствами.

Упражнения

3. Докажите неравенство (1), пользуясь теоремой Чебышёва.

4. Докажите, что $p_n>3n$ при $n\geqslant9$.

Предварительный результат

Одному студенту из Мюнстера, Бонзе, в 1907 г. удалось под руководством своего учителя М. Дена*) прийти к чрезвычайно остроумному выводу, который не только не нуждается в тех вспомогательных средствах, которыми пользуется Чебышёв, но и вообще не требует почти никаких математических познаний.

Основная идея доказательства непосредственно связана с доказанной нами теоремой Евклида. Только вместо того, чтобы из n первых простых чисел составлять выражение

$$M=p_1p_2\ldots p_n-1,$$

мы возьмем из всего ряда этих чисел $p_1p_2\ldots p_n$ лишь i членов и вместо одного выражения M образуем из них нижеследующие p_i выражений:

$$\begin{aligned}M_1&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 1-1,\\ M_2&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 2-1,\\ M_3&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 3-1,\\ M_4&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 4-1,\\ &\ldots\\ M_{p_i}&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot p_i-1.\end{aligned}$$

Относительно этих выражений так же, как и относительно выражений, рассмотренных Евклидом, можно высказать такие утверждения:

а) *ни одно из этих выражений не делится ни на одно из чисел* $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$;

б) *из всех этих выражений не больше, чем одно, может делиться на* p. Действительно, если бы какие-либо два из этих выражений, например $p_1\ldots p_{i-1}x-1$ и $p_1\ldots p_{i-1}y-1$, делились на p_i, то делилась бы на p_i и разность этих выражений $p_1\ldots p_{i-1}(x-y)$, а так как ни один из первых $i-1$ множителей на p_i не делится, на него должна была бы делиться разность $x-y$. Но x и y суть какие-то из чисел ряда 1, 2, 3, 4, ..., p_i, и разность двух таких чисел, даже когда меньшее из них равно 1, а большее p_i, равна всего лишь p_i-1 и, следовательно, во всяком случае меньше p_i. Таким образом, поскольку меньшее число не может иметь множителем большее число, разность $x-y$ не делится на p_i;

в) точно так же *только одно из этих выражений может делиться на* p_{i+1}, *только одно из них может делиться на* p_{i+2} *и т. д., только одно из них может делиться на* p_n.

*)Макс Ден (1878—1952 гг.) — немецкий математик, работал в области геометрии, алгебры, топологии.

Мы приходим к первому важному заключению: если количество чисел $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$ меньше, чем число выражений $M_1, \ldots, M_{p_i}$, т. е., иными словами, если

$$n-i+1<p_i, \qquad (2)$$

то среди выражений M имеется по крайней мере одно, *не делящееся ни на одно из чисел* $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$, так как каждое из простых чисел $p_i, p_{i+1}, \ldots$ $\ldots, p_n$ входит множителем, самое бóльшее, лишь в одно из выражений $M_i, \ldots$ $\ldots, M_{p_i}$.

В силу утверждения а), в это выражение не может также входить множителем ни одно из чисел $p_1, \ldots, p_{i-1}$, и мы приходим к выводу, что оно *не делится* вообще *ни на одно из первых n простых чисел*. Пусть это будет выражение M_k. Теперь доказательство в точности следует образцу евклидовой методики. Выражение M_k или само должно быть простым числом, и в таком случае оно обязательно должно быть больше p_n, или оно разлагается на несколько простых множителей, среди которых, однако, не может встретиться ни одного множителя из ряда $p_i, \ldots, p_n$ и которые все, следовательно, должны быть больше p_n. Но как бы то ни было, должно существовать некоторое простое число, бóльшее p_n, входящее множителем в M_k или равное ему, и следовательно, не бóльшее M_k. Так как из всех выражений M наибольшим является M_{p_i}, то очевидно, что наше число во всяком случае не превышает M_{p_i}. Мы не утверждаем при этом, что определенное таким образом число есть как раз ближайшее, следующее за p_n, т. е. p_{n+1}. Но если это и не так, то оно во всяком случае еще больше чем p_{n+1}, и потому p_{n+1} тем более не может превышать M_{p_i}:

$$p_{n+1}\leqslant p_1\ldots p_{i-1}p_i-1<p_1\ldots p_i.$$

Предварительный результат исследования сводится, таким образом, к следующему: *если имеет место соотношение (2), то справедливо неравенство:*

$$p_{n+1}<p_1\ldots p_i. \qquad (3)$$

Уточнение оценки

Нами получено, очевидно, усиление того, что дает доказательство Евклида:

$$p_{n+1}<p_1\ldots p_n,$$

Так как i меньше n, то правая часть неравенства (3) уменьшена по сравнению с неравенством Евклида. Спрашивается лишь, как велико это уменьшение. Действительно, условие (2) не позволяет нам брать для i произвольно малые значения, i должно быть настолько велико, чтобы количество чисел $p_i, \ldots, p_n$, равное $n-i+1$, было меньше p_i, т. е. первого из них. Постараемся получить представление о значении этого условия на одном простом примере.

Пусть $n=5$: это значит, что мы будем иметь дело только с 5 первыми простыми числами 2, 3, 5, 7, 11. Выберем для i значение 2, тогда $p_i=3$, и группа чисел $p_i, \ldots, p_n$ будет состоять из чисел 3, 5, 7, 11, причем число их $n-i+1=5-2+1=4$ будет больше $p_i=3$, т. е. первого из них. Оказалось, таким образом, что мы выбрали для i чересчур низкое значение. Возьмем для i значение на 1 большее: $i=3$, тогда $p_i=5$ и чисел $p_i, \ldots, p_n$ будет у нас уже только 3, именно 5, 7, 11, и это количество 3 действительно меньше первого из этих трех чисел, именно 5. То, что всякое бóльшее значение i тем более должно удовлетворять требованию (2), не нуждается ни в каких пояснениях.

Положение, которое мы хотим теперь доказать, формулируется следующим образом: *если выбрать для i возможно меньшее значение, удовлетворяющее условию* (2), *то имеет место соотношение:*

$$p_1\ldots p_i<p_{i+1}\ldots p_n. \qquad (4)$$

Завершение доказательства

Неравенство (4) верно при $n=5$, ибо, как это видно из непосредственного вычисления, $2\cdot 3\cdot 5<7\cdot 11$. Чтобы выяснить, остается ли оно справедливым и дальше, нам нужно представить себе яснее, каким образом происходит выбор наилучшего i при возрастающем n.

Если от $n=5$ мы перейдем к $n=6$, т. е. будем рассматривать первые 6 простых чисел, то очевидно, что для p_i мы можем сохранить прежнее значение 5. Действительно, $n-i+1$ было меньше чем 5 на 2 единицы. Если теперь к числам группы присоединить еще число 13, величина $n-i+1$ возрастает до 4, но все же останется меньше чем $p_i=5$. Только когда мы перейдем к $n=7$ и наша группа будет заключать в себе 5 чисел (присоединится число 17), это число окажется не меньше $p_i=5$. Здесь, следовательно, значение i должно быть увеличено на 1, и тогда $p_i=7$. При этом группа может заключать до 6 чисел, т. е. числа $7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23$. Выбор $p_i=7$ достаточен, следовательно, для ближайших следующих трех шагов, т. е. для $k=7, 8, 9$; далее мы должны взять $p_i=11$ и, так как на этот раз ближайшее следующее за 7 простое число больше его не на 2, а на 4 единицы, этот выбор будет достаточен не для 3 ближайших следующих шагов, а уже для 5. Лучше всего понять эти соотношения из нижеприведенной таблицы, в которой p_i выделены жирным шрифтом:

$n=$ 5: 2, 3, **5**, 7, 11
$n=$ 6: 2, 3, **5**, 7, 11, 13
$n=$ 7: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17
$n=$ 8: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17, 19
$n=$9: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17, 19, 23
$n=$10: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29
$n=$11: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31
$n=$12: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37
$n=$13: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41
$n=$14: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43
$n=$15: 2, 3, 5, 7, 11, **13**, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
. . . .

Выяснив, каким образом происходит выбор наилучшего i при возрастающем n, проверим теперь справедливость высказанного выше положения (4). То, что оно остается верным и для $n=6$, не вызывает сомнений, ибо если

$$2\cdot 3\cdot 5<7\cdot 11, \qquad (5)$$

то и

$$2\cdot 3\cdot 5<7\cdot 11\cdot 13, \qquad (6)$$

так как при переходе от $n=5$ к $n=6$ i осталось прежним.

При переходе от $n=6$ к $n=7$ положение вещей меняется. В левой части здесь появляется множитель 7, в правой — 17. Необходимо выяснить, справедливо ли неравенство

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7<11\cdot 13\cdot 17. \qquad (7)$$

Решить это непосредственно на основании неравенства (6) без вычислений мы не можем. Неравенство (6) останется, однако, верным, если слева присоединить к нему множитель 7, а справа 17; мы получаем тогда неравенство

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7<7\cdot 11\cdot 13\cdot 17,$$

в котором справа имеется нежелательный множитель 7. Если мы примем за основу не (6), а (5), то неравенство (7) сможем получить из него без всяких вычислений. Для этого в левую часть неравенства (5) внесем множители $7\cdot 7$, а в правую — $13\cdot 17$; тогда получим $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 7<7\cdot 11\cdot 13\cdot 17$. Сократив на 7, находим искомое неравенство (7).

Эти рассуждения были связаны с переходом от $n=6$ к $n=7$, но так как на всех этапах нашего доказательства мы обошлись без каких бы то ни было вычислительных операций, то ясно, что это доказательство пригодно в равной мере и для всякого последующего перехода. Основывается оно на том простом факте, что при возрастании n число i, как это ясно видно из нашей таблицы, никогда не подвергается увеличению два раза последовательно в двух соседних переходах,— всякий раз при этом происходит «передышка», охватывающая в действительности не только два, но и три (а часто и больше) перехода. Соотношение, аналогичное (7), имеет место и при всяком i.

Упражнение 5. Проведите соответствующее рассуждение.

Умножив обе части неравенства (4) на $p_1...p_t$, получим

$(p_1...p_t)^2<p_1...p_n$, или $p_1...p_t<\sqrt{p_1...p_n}$.

Сопоставив этот результат с неравенством (3), получим соотношение (1), которое нам и требовалось доказать.

Нужно еще добавить, что этот же метод позволяет доказать, что для $n>5$ имеет место более сильное неравенство: $p_{n+1}<\sqrt[3]{p_1...p_n}$. Мы надеемся, что читатели выведут его, пользуясь тем, что «передышка», на которой было основано наше доказательство, охватывает всегда по крайней мере три перехода вместо использованных двух, что позволяет распространить наш вывод и на кубический корень. В то же время абсолютно ясно, что распространять его непосредственно таким же образом дальше нельзя.

Читатель согласится, конечно, с тем, что все это доказательство требует совсем небольших познаний из обычной школьной математики и апеллирует лишь к голому рассудку. Тем яснее оно показывает, сколь внутренне богатой, сколь трудной может быть математика не только в силу многообразия отдельных областей, сочетаемых и надстраиваемых ею для достижения единой цели, но и в тех случаях, когда, отрекаясь порой от этого многообразия, исходя из самых простых данных (как в разобранном случае — из понятия простого числа), она создает построения, поражающие своей глубиной.

Публикацию подготовил А. Егоров

Игры и головоломки

Из куба — тетраэдр

Участники международной конференции по синергетике, проходившей в 1990 году в Будапеште, уже успели утомиться от докладов. И тут на кафедру поднялся молодой японский ученый Ясуги Каякава. Зал оживился, когда он принялся вытаскивать из портфеля изящные конструкции, изготовленные из пластмассовых трубочек, которые в его руках начали трансформироваться в другие занятные формы.

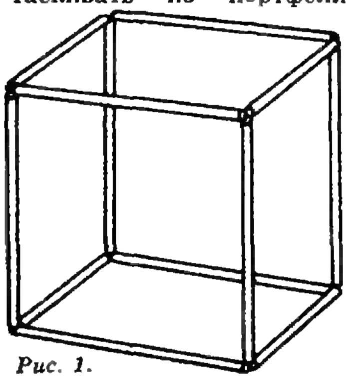


Рис. 1.

Предлагаем одну из задач Каякавы, которую вполне можно считать новой головоломкой. Составьте из соломинок для коктейля и лески остов куба, пропуская леску через соломинки (рис. 1). (Мне для изготовления этой конструкции понадобилось всего три минуты.) А теперь попробуйте преобразовать полученную модель в остов тетраэдра, причем так, чтобы на каждом его ребре оказалось по две соломинки (рис. 2).

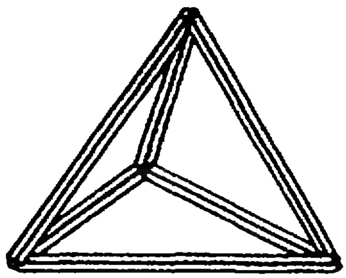


Рис. 2.

Я. Каякаве удалось доказать, что остов всякого полуправильного многогранника (что это такое, описано, например, в первом номере нашего журнала за 1978 г. в статье «Модели многогранников») можно преобразовать либо в остов тетраэдра, либо в остов октаэдра. Попробуйте сами доказать, что остов октаэдра нельзя преобразовать в остов тетраэдра (хотя октаэдр, как и куб, имеет 12 ребер).

А. Савин

О ВЫСОКИХ ДЕРЕВЬЯХ

(статистика и простые оценки)

Кандидат физико-математических наук

А. МИНЕЕВ

Как мы знаем, деревьев высотой, например, в 1 км не существует. Трудно представить себе очень высокое, но тонкое дерево, или маленькое и очень толстое. От чего зависит высота дерева? Существуют ли какие-нибудь количественные закономерности, связывающие толщину и высоту дерева? И если существуют, можно ли их понять и объяснить с помощью простых физических оценок?

Обратимся к книгам, в которых можно найти сведения о высотах (h) и диаметрах (d) у основания ствола различных деревьев. Такая информация есть, например, в книгах Б. Д. Алексеева «Гиганты и карлики растительного мира» (М., 1987) и «Древесные растения главного ботанического сада АН СССР» (М., 1975).

А теперь изобразим эти данные на графике в координатах d^{-1} и h/d (рис. 1). Проведем также несколько прямых, ограничивающих нашу статистику: горизонтальную $h/d=50$ и наклонные вида $h/d \sim d^{-1}$, т. е. линии постоянной высоты.

Видно, что все многообразие земных древесных растений подчиняется некой закономерности. Чтобы разобраться в этом, сформулируем несколько очевидных вопросов. Итак, почему:

— для достаточно толстых деревьев с диаметром у основания $d>0{,}4$—$0{,}5$ м (слева от точки $Б$) отношение h/d ограничено

$$(h/d)_{max}=50?$$

— для более тонких деревьев, $d<0{,}2$ м, значение h/d может превышать 50, но только до определенной высоты дерева ~ 10—20 м?

— максимальная высота деревьев на Земле

$$h_{max}<100\text{—}150 \text{ м?}$$

1. Механика (прочность и упругость)

Начнем с середины и займемся горизонтальной линией $АБ$ на рисунке 1: $(h/d)_{max}=50$. В чем причина этого ограничения?

Естественно предположить, что слишком стройные деревья с большим значением отношения h/d не выдерживают нагрузок и ломаются. Действительно, одним из основных параметров, определяющим максимальное значение h/d, является прочность дерева.

Рассмотрим ограничения, связанные с прочностью, в идеальном случае — вертикально стоящее дерево (а) и в двух вариантах приближения к реальной картине — дерево, наклоненное под углом к вертикали, (б) и дерево под действием ветра (в).

Чтобы упростить оценки, примем, что дерево представляет собой сплошной цилиндр диаметром d и высотой h. Для плотности дерева и предельных допускаемых напряжений в нем возьмем справочные значения

$$\rho \approx 500 \text{ кг/м}^3 \text{ и } \sigma_{доп} \sim 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

а) Строго вертикальное дерево. Для вертикально стоящего дерева максимальные напряжения совпадают с давлением у его основания:

$$\sigma=\rho g h,$$

где $g=10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Подставляя указанные выше значения $\sigma_{доп}$ и ρ, получим оценку сверху для высоты строго вертикального дерева

$$h_{max}=2 \text{ км!}$$

Многовато! По-видимому, случай высоких вертикальных деревьев не реализуется в природе.

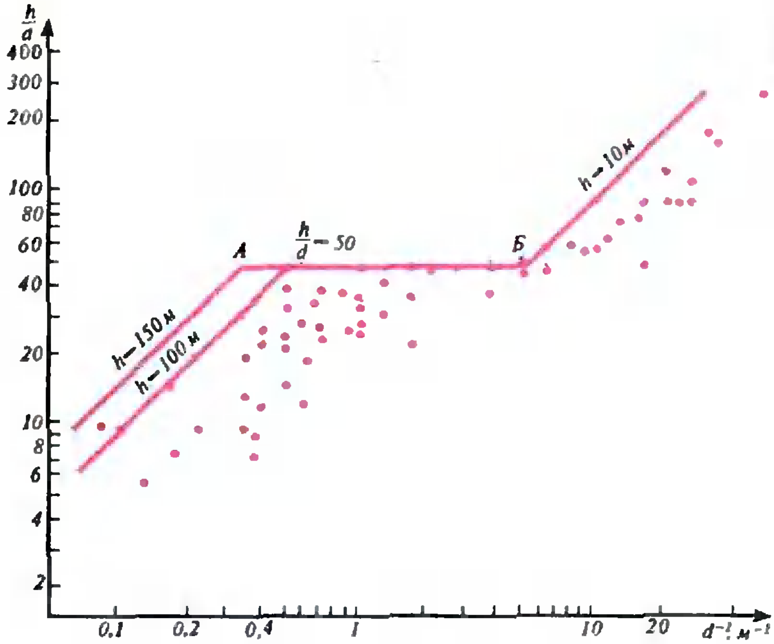


Рис. 1. Зависимость относительной высоты дерева h/d от его диаметра d. Слева на графике — самые толстые деревья, справа — самые тонкие.

б) Дерево, наклоненное к земле. Сделаем шаг к реальности — наклоним дерево. Это приведет к появлению момента сил тяжести, действующих на основание (рис. 2):

$$M_1 = mg\,\frac{h}{2}\sin\alpha,$$

где $m=\varrho h\pi d^2/4$ — масса ствола дерева, α — угол наклона дерева к вертикали.

В равновесии M_1 компенсируется моментом сил упругости в дереве M_2, который для оценки запишем в виде

$$M_2 = l_2 F_2,$$

где l_2 и F_2 — характерные плечо и сила. Как видно из рисунка 2, плечо l_2 порядка радиуса дерева у основания ($r=d/2$), а силу оценим в виде произведения среднего напряжения σ у основания на площадь основания дерева:

$$F_2 \sim \sigma r^2,$$

откуда

$$M_2 \sim \sigma r^3.$$

Точное выражение для момента M_2 близко к этой оценке и составляет

$$M_2 = \frac{\pi}{4}\sigma r^3 = \frac{\pi}{32}\sigma d^3.$$

Приравняв M_1 и M_2, получим

$$\frac{h}{d} = \frac{\sigma}{4\varrho g h \sin\alpha}.$$

Подставим значение плотности и предельно допускаемого напряжения, тогда

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{\max} \approx \frac{500}{h\sin\alpha} \text{ или } \left(\frac{h}{d}\right)_{\max} \approx \frac{22}{\sqrt{d\sin\alpha}}.$$

Видно, что большие углы наклона допустимы только для невысоких деревьев. Так, при $h/d\sim 50$ и $h\sim$ ~ 30 м (среднее дерево) допустимое

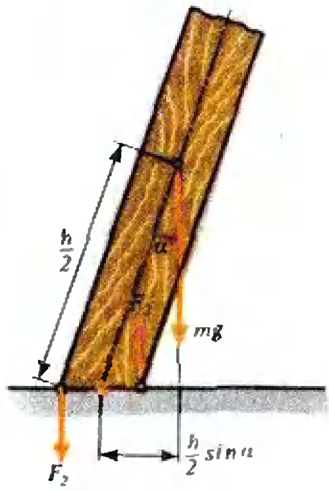


Рис. 2. Моменты сил, действующие на наклоненное дерево.

отклонение от вертикали $\sim 20°$ ($\sin\alpha < 0{,}3$), а для самых больших деревьев высотой ~ 100 м — только $3°$ ($\sin\alpha < 0{,}1$). Поэтому дерево, выросшее высоким, обязано быть либо почти строго вертикальным, либо достаточно толстым. Если в силу каких-то причин отклонение приблизится к допустимому, дерево или сломается, или будет «вынуждено» утолщать ствол, уменьшая тем самым отношение h/d.

Из полученного соотношения следует, что отклонение дерева от вертикали уже приводит к некоторым ограничениям величины h/d. Однако при малых отклонениях величина $(h/d)_{max}$ может быть очень большой. При больших же значениях $\sin\alpha$ (кустарник или дерево с хорошо развитой кроной) ограничено не только отношение h/d, но и сама высота дерева h. Так, если положить $\sin\alpha \sim 0{,}3$—$0{,}5$, то получим

$$h_{max} \approx (30—40)d^{1/2}.$$

Эта зависимость изображена на рисунке 3. Видно, что даже для очень толстых деревьев (дуб, баобаб с толщиной у основания $d \sim 2$—3 м) высота дерева не должна превышать 40—50 м.

в) Дерево и ветер. Ветер также приводит к появлению опрокидывающего момента и напряжений в дереве.

Примем для скорости сильного ветра значение $v \sim 30$ м/с (~ 100 км/ч). Для таких больших скоростей сила воздействия потока воздуха на ствол дерева может быть записана в виде произведения давления потока набегающего воздуха на характерную площадь:

$$F_в \sim p_в S_x.$$

Давление $p_в$ может зависеть только от параметров воздушного потока: плотности $\varrho_в$ и скорости движения v. Из соображений размерности

$$p_в \approx \varrho_в v^2.$$

Характерную площадь дерева S_x представим в виде

$$S_x = S k_ф,$$

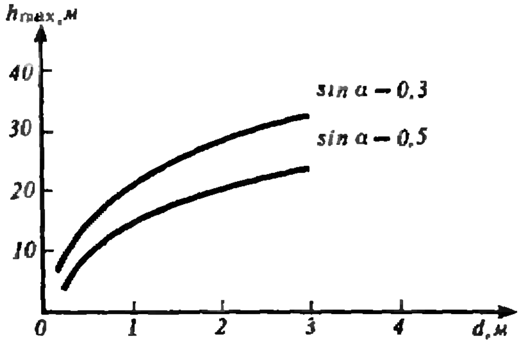


Рис. 3. Зависимость максимальной высоты дерева, наклоненного под углом α, от диаметра ствола.

где $S = dh$ — площадь сечения, перпендикулярного потоку воздуха, $k_ф$ — коэффициент формы, характеризующий отклонение S_x от S. Для деревьев с небольшой кроной $0{,}5 < k_ф < 1$, при большой и густой кроне $k_ф > 1$.

Теперь для силы воздействия ветра можно записать

$$F_в \approx \varrho_в v^2 d h k_ф.$$

Возникающий опрокидывающий момент оценим как

$$M_в = F_в \frac{h}{2}.$$

Воспользовавшись связью между опрокидывающим моментом и возникшими в дереве напряжениями, получим ограничение

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{max} \approx \sqrt{\frac{\pi}{16k_ф}}\sqrt{\frac{\sigma_{доп}}{\rho_в v^2}}.$$

После подстановки значений параметров $\sigma_{доп} \sim 10^7$ Н/м², $\varrho_в \sim 1{,}3$ кг/м³, $v \sim 30$ м/с найдем

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{max} \approx \frac{40}{\sqrt{k_ф}}.$$

Таким образом, сильный ветер может объяснить природу плато *АБ* на рисунке 1. Отметим, что из параметров дерева в правую часть выражения для $(h/d)_{max}$ входит только отношение $\sigma_{доп}/k_ф$, да и то зависимость от него не сильная.

Посмотрим теперь на наиболее «стройную», правую часть рисунка 1, соответствующую молодым деревьям

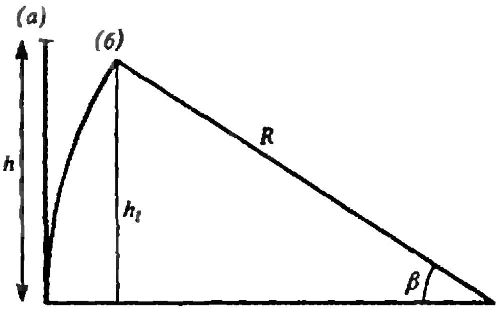


Рис. 4. Вертикальное (а) и изогнутое (б) деревья.

с небольшим диаметром основания. Почему для них возможно увеличение отношения h/d до 100, 200 и даже 300?

Приглядимся к формуле $(h/d)_{max}\sim\sim\sqrt{\sigma_{доп}/(k_ф v^2)}$. Первое, что приходит на ум,— эти деревья частично защищены от сильного ветра более высокими деревьями, а $(h/d)\sim v^{-1}$. Кроме того, у молодых деревьев часто относительная площадь кроны небольшая, т. е. величина $k_ф\sim 0{,}5-1$. Все вместе это может объяснить увеличение $(h/d)_{max}$ при небольших значениях диаметра ствола.

Но почему излом зависимости $h/d=f(d)$ (точка *Б* на рисунке 1) происходит при значении высоты дерева $h\sim 10-20$ м? По-видимому, это характерное значение высоты, при которой дерево еще может сильно изгибаться или отклоняться по вертикали. Действительно, допустим, что ветер наклонил дерево так, что $\sin\alpha\sim 0{,}3-0{,}5$. Тогда получим, что отношение h/d становится равным 50 как раз при высоте дерева $h\sim 10-20$ м.

Устойчивость формы. Приведем несколько оценок по устойчивости формы ствола, основание которого закреплено в земле. Допустим, что под действием внешних сил ствол дерева слегка изогнулся. Это, во-первых, приведет к запасанию энергии в виде упругой деформации ствола $U_д$ а во-вторых — к уменьшению потенциальной энергии $\Delta U_п$ за счет понижения центра тяжести.

Понятно, что должно выполняться условие

$$\Delta U_п \leqslant U_д$$

Иначе изгиб будет нарастать, и ствол сломается. Сформулируем ограничение, следующее из этого условия. Для этого изогнем постоянный по сечению ствол дерева. Интуитивно кажется, что при малом изгибе он примет форму дуги окружности.

Найдем изменение потенциальной энергии стержня: $\Delta U_п = mg(h-h_1)$. Здесь mg — масса дерева, h — высота вертикального ствола, h_1 — изогнутого. Величины h и h_1 изображены на рисунке 4, из которого виден и способ их вычисления:

$h=R\beta$, $h_1=R\sin\beta$ (β — в радианах).

Таким образом,

$$\Delta U_п = mgR(\beta-\sin\beta).$$

В случае малых изгибов ($\beta\ll 1$) можно показать, что $\sin\beta\approx\beta-\beta^3/6$. Это дает

$$\Delta U_п\approx\frac{mgR\beta^3}{6}\approx\frac{mgh^3}{6R^2}.$$

Оценим теперь потенциальную энергию, запасаемую в стержне (стволе) при малом изгибе. Заметим, что изгиб тонкого стержня ($d\ll h$) сводится к простым деформациям поперечного сечения: сжатию и растяжению. Такие напряжения σ в поперечном сечении можно определить по формуле Гука

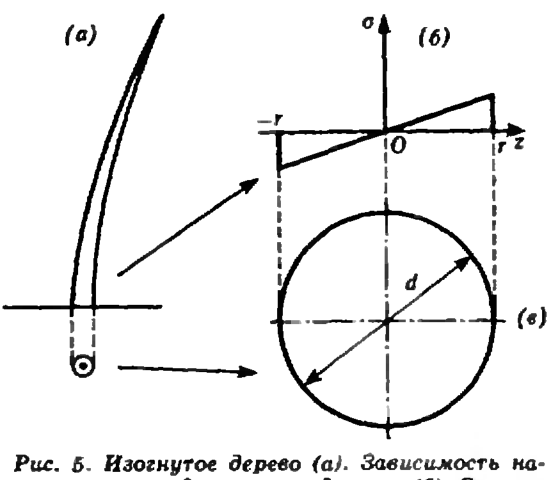
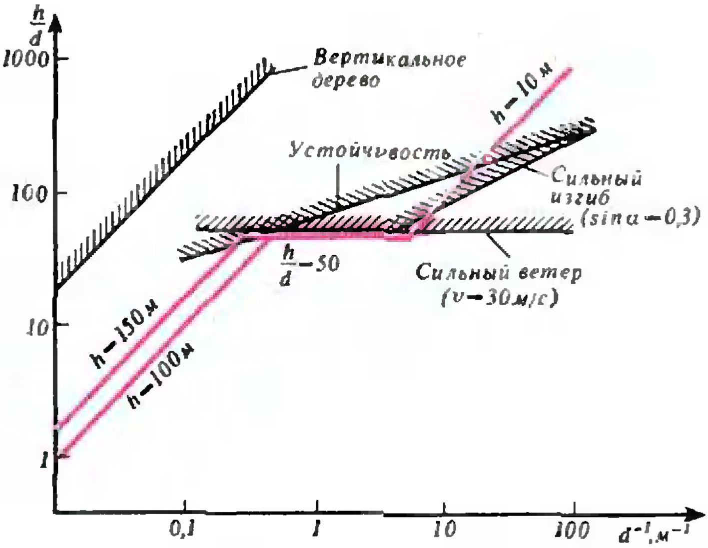


Рис. 5. Изогнутое дерево (а). Зависимость напряжения σ в дереве от радиуса r (б). Сечение ствола, вид сверху (в).

Рис. 6. Ограничения, связанные с механическими параметрами дерева



$$\sigma=\varepsilon E,$$

где E — модуль упругости, ε — относительная деформация — удлинение или сжатие. В нашем случае

$$\varepsilon=Z/R,$$

где Z — величина абсолютной деформации. Слои дерева, располагающиеся справа от точки O (рис. 5), испытывают сжатие, слева — растяжение. Положение точки O («нейтральной») в тонких стержнях — посередине поперечного сечения.

Энергия деформации в единице объема может быть оценена как произведение удельной силы на удельное перемещение:

$$F\,\frac{\Delta l}{V}=\frac{F}{S}\,\frac{\Delta l}{l}=\sigma\varepsilon.$$

Во всем объеме ствола дерева V энергия упругой деформации $U_д\approx\sigma_м\varepsilon_м V$, где $\sigma_м$ и $\varepsilon_м$ — напряжение и относительная деформация на середине радиуса. Поскольку

$\sigma_м=\varepsilon_м E$, $\varepsilon_м=r/(2R)$, $V=\pi r^2 h$, $r=d/2$,

получим

$$U_д\approx\frac{d^2}{16R^2}EV=\frac{\pi}{64}\,\frac{d^4hE}{R^2}.$$

Таким образом, приходим к следующему ограничению:

$$\frac{h}{d}\leqslant\left(\frac{3}{8}\,\frac{E}{\rho gh}\right)^{1/2}\ \text{или}\ \frac{h}{d}\leqslant\left(\frac{3}{8}\,\frac{E}{\rho gd}\right)^{1/3}.$$

При значении модуля упругости, характерном для деревьев, $E\approx5\cdot10^9$ Па и $\rho\sim500$ кг/м^3 имеем

$$\frac{h}{d}\leqslant\frac{700}{\sqrt{h}}\ \text{или}\ \frac{h}{d}\leqslant\frac{60}{\sqrt[3]{d}}.$$

Предварительные итоги. Что же позволили понять «механические» параметры дерева: прочность и упругость? Не так мало: центральную и правую части на рисунке 1.

На рисунке 6 красным цветом показана исходная кривая, штриховкой — ограничения, связанные с:

— прочностью вертикально стоящего дерева;
— сильным изгибом;
— действием сильного ветра;
— устойчивостью под действием собственного веса.

Видно, что идеальный случай — вертикально стоящее дерево — фактически не реализуется. Сильный ветер объясняет плато $h/d\approx\text{const}$. Устойчивость формы ствола под действием собственного веса для очень толстых деревьев (d больше нескольких метров) приводит к более жесткому ограничению отношения h/d, чем сильный ветер.

Но природу максимальной высоты деревьев механика не прояснила...

(Окончание следует)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1331 — М1335, Ф1338 — Ф1342

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1331» или «Ф1338». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача Ф1342 предлагалась на Всероссийской физической олимпиаде 1991 года.

М1331. Отрезки AK, BM, CN, DL делят квадрат $ABCD$ со стороной 1 на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 и пять четырехугольников (рис. 1); площадь

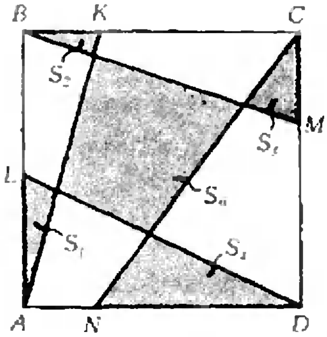


Рис. 1.

центрального четырехугольника равна S_0, причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Докажите равенство

$$AL + BK + CM + DN = 2.$$

С. Сефибеков

М1332. Из бумаги склеены два одинаковых правильных тетраэдра. Какое наименьшее число ребер этих тетраэдров придется разрезать, чтобы затем склеить их по разрезанным ребрам в один правильный октаэдр?

Б. Бегун

М1333. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c) \geqslant 9abc.$$

Г. Алиханов

М1334. Можно ли числа 1, 2,..., 10 разбить на два подмножества так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась на 11?

И. Вайнштейн

М1335. n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.

а) При каких n это возможно, если $m=9$?

б) При каких n и m это возможно?

Ю. Чеканов

Задачник «Кванта»

Рис. 2.

Ф1338. На горизонтальной поверхности стола покоится клин массой M с углом наклона α к горизонту (рис. 2). Со скоростью v_0 на него наезжает маленькая тележка массой m. Через какое время тележка съедет с клина? Какое расстояние проедет за это время клин? Въезд на клин сделан так, что тележка движется плавно, без толчков.

З. Рафаилов

Ф1339. Внутри большого мыльного пузыря находится маленький, радиус которого в 10 раз меньше. Воздух *снаружи откачивают*, после чего радиус большого пузыря увеличивается в 2 раза. Во сколько раз увеличится радиус внутреннего пузыря? Температуру считайте постоянной, влиянием силы тяжести можно пренебречь.

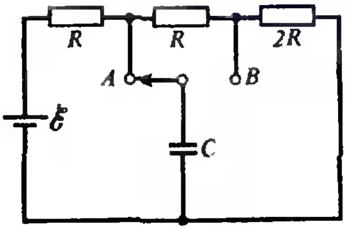


Рис. 3.

Ф1340. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ очень быстро перебрасывают из положения A в положение B и обратно. Найдите среднее значение тока через резистор сопротивлением $2R$. Какой ток течет через батарею? В каждом положении ключ находится одинаковое время.

А. Зильберман

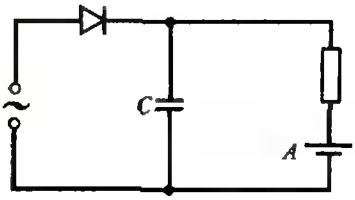


Рис. 4.

Ф1341. В однополупериодном выпрямителе для зарядки аккумулятора A (рис. 4) «высох» электролитический конденсатор большой емкости — его емкость упала во много раз. Во сколько раз увеличится время, необходимое для зарядки аккумулятора? Действующее значение напряжения источника переменного напряжения $U=15$ В, напряжение аккумулятора $\mathscr{E}=12$ В. Диод считайте идеальным.

Р. Александров

Ф1342. Если объектив фотоаппарата, имеющий фокусное расстояние $F=58$ мм и наведенный на бесконечность, направить на Солнце, то при диаметре входного отверстия (диафрагмы) объектива больше, чем $d=11$ мм, прожигается шторка затвора фотоаппарата. На какое расстояние нужно навести объектив, чтобы даже при *существенно большем диаметре входного отверстия* его можно было без опаски направлять на Солнце? Видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha=9{,}3\cdot10^{-3}$ рад. Считайте, что при наведении на бесконечность шторка затвора находится в фокальной плоскости объектива.

М. Гаврилов

Решения задач

М1301 — М1305, Ф1318 — Ф1322

М1301. Обязательно ли тетраэдр правильный, если у него:
а) пять двугранных углов равны друг другу;

Ответ на все три вопроса — отрицательный. Приведем примеры.

а) Легко построить тетраэдр, грани которого — четыре равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами, два из которых имеют угол α при вершине, *б) восемь плоских углов равны друг другу?*

в) Обязательно ли треугольная пирамида $ABCD$ — правильная, если ее основание ABC — правильный треугольник и три плоских угла при вершине D равны друг другу?

два других — углы α при основании. При α, отличном от 60°, этот тетраэдр неправильный, но имеет 5 равных двугранных углов (рис. 1, *а*): ведь два его трехгранных угла с равными α плоскими углами равны и имеют равные двугранные углы (один из них — общий).

б) Из четырех равных равнобедренных (но не равносторонних) треугольников можно склеить «полуправильный» тетраэдр, имеющий 8 равных плоских углов (рис. 1, *б*).

в) Пусть плоские углы при вершине D правильной треугольной пирамиды $BCED$ меньше 60° (рис. 1, *в*).

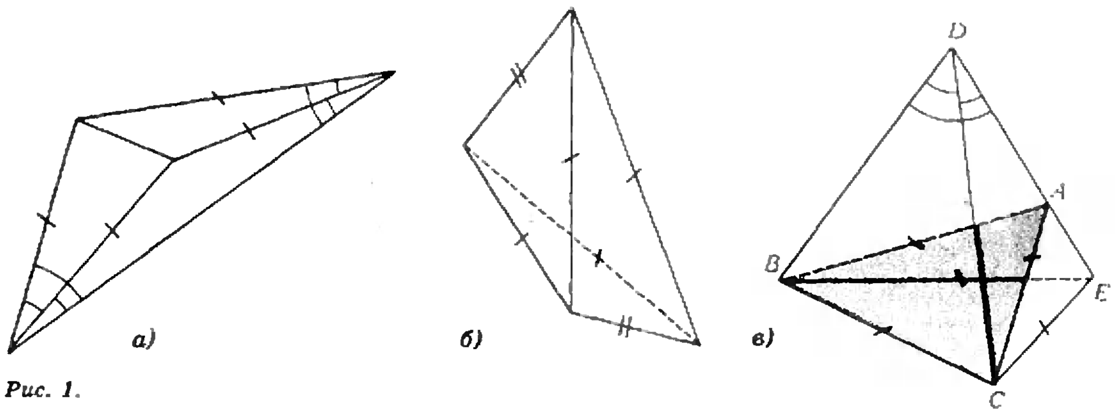


Рис. 1.

На ее ребре DE можно выбрать точку A такую, что $AB=EB$. (В плоскости BDE окружность с центром B и радиусом BE пересекает прямую DE, кроме E, еще в одной точке A, лежащей на отрезке DE). Пирамида $ABCD$ — неправильная, но основание ABC — правильный треугольник: $AB=AC=EB=EC=BC$, а все углы при вершине D равны.

Н. Васильев, В. Сендеров

***М1302.** Докажите, что произведение многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен (отличный от нуля) имеет не менее n отличных от нуля коэффициентов.*

Докажем это по индукции. Для $n=1$ утверждение очевидно. Рассмотрим некоторый многочлен $P(x)$, отличный от нуля, и докажем, что $P(x)(x+1)^n$ имеет не менее $n+1$ отличных от нуля коэффициентов, если это утверждение уже доказано для меньших n. Мы можем, очевидно, считать, что свободный член, т. е. число $P(0)$, отличен от нуля (при умножении на x^k число ненулевых коэффициентов не изменится).

Возьмем производную:

$$(P(x)(x+1)^n)'=(x+1)^{n-1}(P'(x)(x+1)+nP(x)).$$

Второй сомножитель отличен от 0. Тем самым, у производной многочлена $P(x)(x+1)^n$ не менее n ненулевых коэффициентов по предположению индукции. Значит, у этого многочлена не менее $n+1$ ненулевых коэффициентов: свободный член $P(0)$ и еще n.

В. Сендеров

Задачник „Кванта"

М1303. *Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ такие, что (при всех $n>3$)*

$$q_n=(q_{n-3}+q_{n-1})/q_{n-2}.$$

Все возможные ответы указаны на полях.

По условию,

$$q_nq_{n-2}=q_{n-3}+q_{n-1}. \qquad (*)$$

Выберем из всех сумм $q_{n-3}+q_{n-1}$ наименьшую. Тогда

$$q_{n-3}+q_{n-1}=q_nq_{n-2}\leqslant q_{n-2}+q_n,$$

что возможно лишь в двух случаях. Либо все числа $q_{n-3}, q_{n-2}, q_{n-1}$ и q_n равны 2, либо среди них встречается 1 (для натуральных чисел $a>1$ и $b>1$ верно неравенство $ab\geqslant a+b$, ибо $(a-1)(b-1)\geqslant 1$).

В первом случае все члены последовательности равны 2 (по данным трем подряд идущим членам последовательности вся последовательность однозначно восстанавливается по формуле $(*)$).

2, 2, 2, 2, ...
1, 2, 5, 3, 1, 2, ...
1, 3, 5, 2, 1, 3, ...

Эти три последовательности дают ответ (всего девять различных последовательностей).

Во втором случае, т. е. когда $q_m=1$ для некоторого m, докажем, что $q_{m+4}=1$.

Пусть следующие за q_m три числа больше 1. Из соотношений

$$q_{m+3}q_{m+1}=q_m+q_{m+2}=1+q_{m+2}$$

и

$$q_{m+4}q_{m+2}=q_{m+1}+q_{m+3}\leqslant q_{m+3}q_{m+1}=1+q_{m+2}$$

получаем

$$q_{m+2}(q_{m+4}-1)\leqslant 1.$$

Это возможно лишь при $q_{m+4}=1$, причем $q_{m+3}q_{m+1}-1=$ $=q_{m+3}+q_{m+1}$, откуда $(q_{m+3}-1)(q_{m+1}-1)=2$, т. е. одно из чисел q_{m+3}, q_{m+1} равно 2, а другое — 3. Так мы получим еще два ответа, приведенные на полях (разумеется, возможны любые последовательности, получаемые из них сдвигом).

1, 1, a, $a+1$, ...
1, a, 1, $2/a$, ...
1, $a+1$, a, 1, ...

Во всех этих случаях $a=2$ или $a=1$.

Остается рассмотреть случаи, когда одно из трех следующих за $q_m=1$ чисел равно 1 и убедиться в том, что при этом последовательность, удовлетворяющая уравнению $(*)$, будет содержать нецелые числа (на полях в возникающих при этом последовательностях число a должно быть делителем двух, что возможно лишь при $a=2$ и $a=1$).

Итак, ответом к этой задаче служат девять последовательностей, указанных на полях.

Второе решение. Мы докажем, что последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая уравнению $(*)$, периодична с периодом 4, т. е. что $q_{n+4}=q_n$ для любого $n\geqslant 1$.

Из $(*)$ при $i\geqslant 4$ следует, что

$$q_{i-3}+q_{i-1}=q_iq_{i-2}$$

и

$$q_{i-1}+q_{i+1}=q_{i+2}q_i.$$

Вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем

$$q_{i+1}-q_{i-3}=q_i(q_{i+2}-q_{i-2}).$$

Запишем теперь такие равенства при $i=4, 5, \ldots, n+2$:

$$\begin{aligned} q_5-q_1&=q_4(q_6-q_2),\\ q_6-q_2&=q_5(q_7-q_3), \qquad (**)\\ &\ldots\\ q_{n+3}-q_{n-1}&=q_{n+2}(q_{n+4}-q_n). \end{aligned}$$

Из (**) последовательно получаем:

$$q_5-q_1=q_4q_5(q_7-q_3),$$
$$q_5-q_1=q_4q_5q_6(q_8-q_4),$$
$$\ldots$$
$$q_5-q_1=q_4q_5q_6\ldots q_{n-2}(q_{n+4}-q_n).$$

Поскольку среди любой четверки чисел q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, q_{k+3} обязательно встретится число, не равное 1, все эти равенства возможны лишь при $q_{n+4}=q_n$ при любом $n\geqslant4$. Итак, последовательность $\{q_n\}$ обязательно периодична.

Дальнейшее напоминает то, что делалось в первом решении. Ясно, что достаточно найти q_1, q_2, q_3. Имеем

$$q_2+q_4=q_5q_3=q_1q_3,$$
$$q_1+q_3=q_2q_4.$$

Если все числа q_1, q_2, q_3, q_4 не меньше двух, то

$$q_2+q_4=q_5q_3=q_1q_3$$

и

$$q_1+q_3=q_2q_4\geqslant q_2+q_4=q_1q_3,$$

т. е.

$$q_1+q_3\geqslant q_1q_3,$$

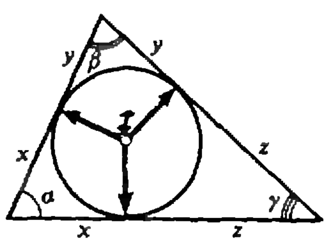
но это возможно лишь тогда, когда все эти числа равны 2. Отсюда получается первое решение — последовательность 2, 2, 2, 2, ...

Осталось последовательно рассмотреть случаи, когда одно из q_i ($i=1$, 2, 3, 4) равно 1, и воспользоваться периодичностью.

О. Алиев, С. Елисеев, У. Нуриев

M1304. *Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, R — радиус описанной окружности. Докажите, что*

$$R^3\geqslant IA\cdot IB\cdot IC.$$



Пусть α, β, γ — углы треугольника, x, y, z — отрезки, на которые точки касания с вписанной окружностью разбивают его стороны. Поскольку радиус R равен половине отношения стороны к синусу противоположного угла (теорема синусов), а отрезки IA, IB, IC выражаются через x, y, z и углы из прямоугольных треугольников, требуемое неравенство можно переписать так:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}\geqslant\frac{xyz}{\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)},$$

или

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant64\,xyz\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2). \tag{*}$$

С другой стороны, пользуясь теоремой косинусов, получаем

$$\sin^2(\alpha/2)=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$
$$=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}.$$

Аналогично,

$$\sin^2(\beta/2)=\frac{xz}{(x+y)(y+z)},$$

$$\sin^2(\gamma/2)=\frac{xy}{(x+z)(y+z)},$$

так что

$$\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

и неравенство (*) превращается в неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz,$$

для доказательства которого достаточно перемножить три очевидных неравенства

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy},\ y+z\geqslant 2\sqrt{yz},\ x+z\geqslant \sqrt{xz}.$$

Еще одно решение задачи можно получить, используя равенства

$$IA=r/\sin(\alpha/2),\ IB=r/\sin(\beta/2),\ IC=r/\sin(\gamma/2),$$

$$r=4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2).$$

Имеем:

$$R^2\geqslant 4r^2,\ \text{т. е. } R\geqslant 2r.$$

Это хорошо известное неравенство можно доказать чисто геометрически (например, опираясь на то, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC, равный $R/2$, не меньше r).

Н. Васильев, В. Сендеров, А. Соловьев

***М1305.** Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таблица $n\times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца, стоит число a_i+b_j. Докажите, что если во всех столбцах произведения одинаковы, то и во всех строках — тоже.*

Степень многочлена

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_n)=f(x)$$

меньше n. При каждом j значение $f(-b_j)$ — с точностью до знака $(-1)^n$ это произведение по столбцу — будет одно и то же. Таким образом, многочлен степени меньше n принимает равные значения в n разных точках. Значит, он тождественно равен константе. Но тогда и его значения $f(a_i)$ при каждом i равны той же константе. А это и значит, что произведения по строкам одинаковы (и при этом отличаются от произведений по строкам разве лишь множителем $(-1)^n$).

Д. Фомин

***Ф1318.** Велосипедное колесо, отпущенное с высоты $H=1$ м (рис. 1), подпрыгивает на высоту $h=0{,}8$ м. Закрутим теперь колесо до скорости $n=2$ об/с и отпустим с той же высоты. Под каким углом к верти-*

Обозначим скорость падения колеса непосредственно перед ударом о поверхность через v, а скорость сразу после отскока — через u. Изменение импульса колеса по вертикали связано с действием силы нормальной реакции опоры N (рис. 2). По горизонтали на колесо действует сила трения $F_{\text{тр}}$ — она разгоняет центр масс колеса и уменьшает его угловую скорость. Необходимо исследование — прекратится ли *кали оно отскочит от пола? А если увеличить скорость вращения в 2 раза? Еще в 2 раза? Коэффициент трения о горизонтальную поверхность $\mu=0,7$, радиус колеса $R=0,5$ м.*

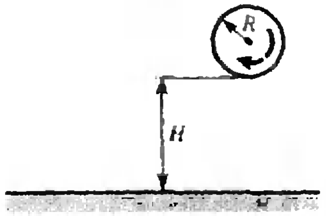


Рис. 1.

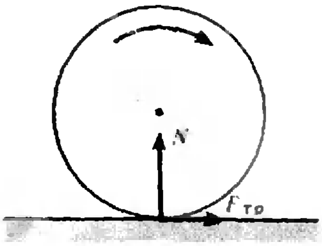


Рис. 2.

проскальзывание нижней точки колеса относительно поверхности до окончания соударения или нет.

Найдем такое значение начальной угловой скорости вращения колеса ω_0, при котором проскальзывание прекратится как раз к окончанию соударения, т. е. величина приобретенной горизонтальной скорости V будет связана с окончательным значением угловой скорости ω соотношением $\omega R=V$. Для этого запишем следующие соотношения:

$$\sum N_i\Delta t_i=M(v+u),$$
$$\sum \mu N_i\Delta t_i=MV,$$
$$\sum R\mu N_i\Delta t_i=I(\omega_0-\omega),$$

где M — масса колеса, $I=MR^2$ — его момент инерции; здесь учтено также, что до окончания проскальзывания $F_{тр}=\mu N$. Отсюда найдем «критическое» значение угловой скорости:

$$\omega_0=2\mu\frac{v+u}{R}=2\mu\frac{\sqrt{2gH}+\sqrt{2gh}}{R}\approx 23{,}7\ \text{рад/с},$$
$$n_0\approx 3{,}8\ \text{об/с}.$$

Видно, что при $n=2$ об/с проскальзывание успеет прекратиться (а при двух других значениях скорости вращения — нет). После прекращения проскальзывания сила трения обращается в ноль, и приобретенная горизонтальная скорость V дальше не меняется. В этом случае угол отскока определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha_1=V/u=\mu(v+u)/u=\mu(\sqrt{H/h}+1),\quad \alpha_1\approx 56^\circ.$$

При $\omega>\omega_0$ угол отскока перестает зависеть от величины ω_0:

$$\operatorname{tg}\alpha_2=2u/(\omega R),\quad \alpha_2\approx 52^\circ.$$

П р и м е ч а н и е. Эта задача — упрощенный вариант одной из задач Международной физической олимпиады 1991 года.

А. Зильберман

Ф1319. *Стальную струну диаметром $d=1$ мм и длиной $l=1$ м натянули и закрепили ее концы на одной высоте. К середине струны прикрепили груз массой $M=1$ кг. Найдите «провис» струны. Каким он станет, если уменьшить температуру на $\Delta T=1$ К? Модуль Юнга для стали $E=2\cdot 10^{11}$ Н/м^2, коэффициент линейного расширения $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. Расстояние между точками подвеса не меняется.*

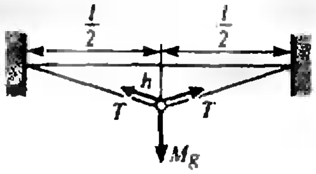
Зная размеры струны ($l=1$ м, $S=\pi d^2/4\approx 1$ мм^2) и плотность стали ($\rho=7{,}8$ г/см^3), легко определить ее массу — она оказывается меньше 10 г. Тогда можно считать, что начальное натяжение струны пренебрежимо мало́ по сравнению с ее натяжением под действием груза. Из простых геометрических соображений, учитывая малость «провиса» h, получаем выражение для абсолютного удлинения струны (см. рисунок):

$$\Delta l=2\sqrt{(l/2)^2+h^2}-l\approx 2h^2/l.$$

Из условия равновесия груза находим силу натяжения струны:

$$T=SE\Delta l/l=Mg/(2\sin\varphi)\approx Mgl/(4h).$$

Подставив сюда значение Δl, получим соотношение



для определения h:

$$\frac{SE}{l}\frac{2h^2}{l}=\frac{Mgl}{4h}\Rightarrow h^3=l^3\frac{Mg}{8ES}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{l}{2}\sqrt[3]{\frac{Mg}{ES}}=0{,}02l=2\text{ см.}$$

Угол φ при этом составляет примерно 0,02 рад и сила натяжения $T\approx500$ Н.

При охлаждении на 1 К относительное укорочение струны составит

$$\Delta l_1/l=1{,}2\cdot10^{-5},$$

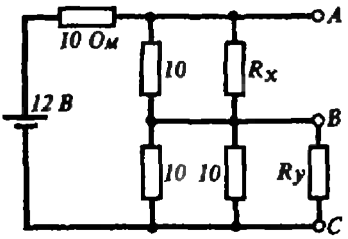
а сила натяжения струны без груза будет равна

$$T_1=SE\Delta l_1/l\approx2H,$$

что намного меньше найденной силы при наличии груза. Значит, «провис» останется практически таким же.

З. Рафаилов

Ф1320. *В схеме, изображенной на рисунке, батарея идеальная, а резисторы — кроме R_x и R_y — имеют сопротивления по 10 Ом. Напряжение между точками A и B составляет 4 В, а между B и C — 2 В. Найдите величины R_x и R_y.*



Это совсем простая задача.

Сравнивая напряжение между точками B и C (2 В) и напряжение на резисторе сопротивлением 10 Ом, подключенном непосредственно к батарее (6 В), можно заметить, что последнее ровно в 3 раза больше первого. Из этого следует, что сопротивление между точками B и C равно 10/3 Ом, а значит, $R_y=10$ Ом. Ясно также, что сопротивление между A и B составляет 20/3 Ом, откуда сразу находим $R_x=20$ Ом.

Итак,

$$R_x=20\text{ Ом},\ R_y=10\text{ Ом}.$$

А. Зильберман

Ф1321. *В «черном ящике» с тремя выводами (рис. 1) находится схема, состоящая из резистора сопротивлением $R=100$ Ом, катушки индуктивности и конденсатора. При измерениях на переменном токе ($\omega=1000\text{ с}^{-1}$) были определены значения сопротивлений $R_{AB}=75$ Ом и $R_{BC}=125$ Ом. Может ли индуктивность катушки быть равной 1 Гн? Ответ обо-*

Условие задачи позволяет предполагать наличие в «ящике» одной из многочленных схем (их можно нарисовать несколько десятков), поэтому нужно схемы классифицировать по какой-нибудь системе — чтобы ничего не упустить.

Все схемы похожи либо на «звезду» (рис. 2), либо на «треугольник» (рис. 3). Попробуем такой вариант классификации. Вначале рассмотрим «звезды», где в каждом плече ровно один элемент. Одну из них мы уже нарисовали (см. рис. 2), еще их будет ровно 5: катушка наверху, а R и C поменялись местами, две схемы, где наверху конденсатор, и две — где наверху резистор. Аналогично — для «треугольников». Итак, у нас уже есть 12 схем.

снуйте схемами и расчетом. На данной частоте катушку и конденсатор считайте идеальными.

Задачник „Кванта"

Рассмотрим дальше «звезды», где в одном из плеч два элемента включены сначала параллельно, потом последовательно; затем — такие же «треугольники» Получим 72 схемы. Правда, некоторые из них при

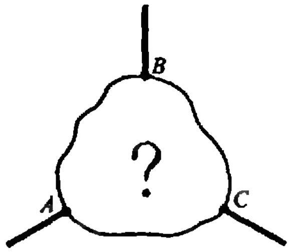


Рис. 1.

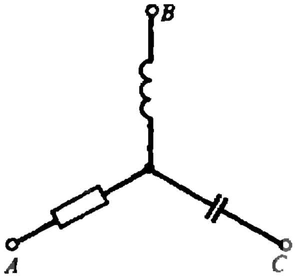


Рис. 2.

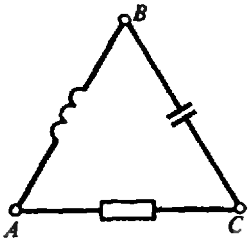


Рис. 3.

этом будут нарисованы дважды — например, «треугольник» на рисунке 4 и «звезда» на рисунке 5 получились одинаковыми. Есть еще несколько схем, где в одном плече находятся все три элемента. Одним словом, возможных схем очень много.

Если теперь каждую из них подробно рассчитать, а потом проверить выполнение условий задачи, то это займет очень много времени (а его и так не хватает). Однако для некоторой части схем сразу видно,

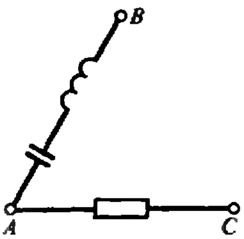


Рис. 4.

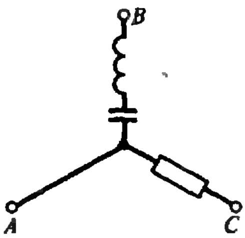


Рис. 5.

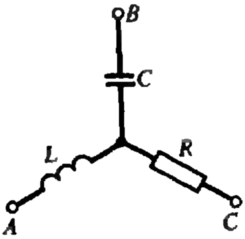


Рис. 6.

что они не подходят. Например, в схеме на рисунке 2 сопротивление между точками A и B явно больше 100 Ом, что противоречит условию. В других схемах все не так очевидно, однако расчет тоже не очень сложен. Рассмотрим для примера схему на рисунке 6. Для нее

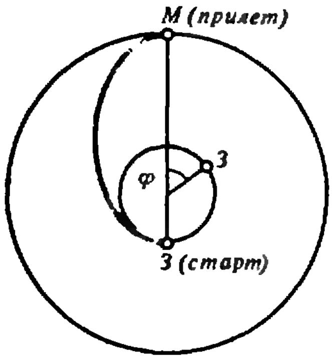
$$R_{AB}=\omega L-\frac{1}{\omega C},\ R_{BC}=\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}\ .$$

Получается интересный результат — каждого из этих соотношений достаточно, чтобы определить емкость конденсатора C (ведь L и R заданы в условии), поэтому совместность этих уравнений может иметь место только в том случае, когда числа в условии задачи специально подобраны. В нашем же случае из равенства $R_{AB}=\omega L-1/(\omega C)=75$ Ом следует, что емкостное сопротивление $1/(\omega C)$ порядка 1000 Ом, а значит, условие $R_{BC}=125$ Ом выполнить не удастся. Это же относится и к остальным схемам.

Итак, ответ в задаче такой: судя по результатам измерений R_{AB} и R_{BC}, катушки индуктивностью 1 Гн в «ящике» нет.

А. Зильберман

Ф1322. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гоманна — Цандера (перигелий этой орбиты находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Марса). Найдите время этого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по той же орбите. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_З=365{,}25$ суток, Марса — $T_М=687$ суток. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.



Большая полуось a орбиты, по которой космический корабль совершает перелет, очевидно, будет равна полусумме радиусов орбит Земли и Марса (см. рисунок):

$$a=(a_З+a_М)/2.$$

По третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения небесных тел вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит, т. е. $a_З\sim T_З^{2/3}$ и $a_М\sim T_М^{2/3}$. Аналогично связаны между собой большая полуось a орбиты корабля и период его обращения T: $a\sim T^{2/3}$. Тогда получаем

$$T^{2/3}=(T_З^{2/3}+T_М^{2/3})/2,$$

откуда

$$T=(T_З^{2/3}+T_М^{2/3})^{3/2}/2^{3/2}.$$

Время перелета корабля τ от Земли до Марса равно половине периода обращения по орбите, следовательно,

$$\tau=T/2=(T_З^{2/3}+T_М^{2/3})^{3/2}/2^{5/2}\approx 259 \text{ сут.}$$

Для вычисления времени, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по той же орбите, заметим, что в момент прилета Земля опережает Марс на угол

$$\varphi=\omega_З\tau-\pi=2\pi\tau/T_З-\pi,$$

где $\omega_З$ — угловая скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца. В момент же отправления в обратный путь Земля, очевидно, должна отставать от Марса на такой же угол φ, или, другими словами, опережать на угол $2\pi k-\varphi$ (k — целое число). В нашем случае минимальному времени ожидания соответствует $k=1$. Тогда время, за которое угловое опережение Земли увеличится с φ до $2\pi-\varphi$, будет равно

$$t=(2\pi-2\varphi)/(\omega_З-\omega_М),$$

где $\omega_З-\omega_М$ — относительная угловая скорость движения Земли и Марса. Но

$$\omega_З-\omega_М=2\pi/T_З-2\pi/T_М,$$

поэтому окончательно

$$t=(1-\varphi/\pi)/(1/T_З-1/T_М)=$$
$$=(2-2\tau/T_З)/(1/T_З-1/T_М)\approx 457 \text{ сут.}$$

М. Гаврилов

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Поздравляем победителей этого конкурса за 1991 год.

Получили право участвовать в республиканских олимпиадах школьников 1992 года:

По математике

Алексеенко Ю.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Ахмедов А.— Баку, с. ш. № 58, 10 кл.
Белоус Ю.— Нижний Тагил, школа-лицей № 51, 11 кл.
Бородин А.— Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
Вайнер Б.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Воронецкая М.— Ижевск, с. ш. № 41, 11 кл.
Гетун С.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Дудко Д.— Киев, с. ш. № 61, 10 кл.
Иоффе С.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Когабаев Н.— Усть-Каменогорск, с. ш. № 25, 11 кл.
Лавренюк Я.— Киев, с. ш. № 179, 11 кл.
Лисицын Н.— Ижевск, ИЕГЛ, 11 кл.
Мамедов Н.— Баку, с. ш. № 204, 10 кл.
Насыпанный Б.— Гайворон, с. ш. № 5, 10 кл.
Петросян А.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
Солодушкин А.— Степногорск, с. ш. № 5, 10 кл.
Таратин А.— Северодвинск, с. ш. № 5, 11 кл.
Турешбаев В.— Кзыл-Орда, с. ш. № 233, 11 кл.
Хайкис Д.— Ижевск, с. ш. № 30, 11 кл.
Хвенкин К.— Минск, МССШ при БГУ, 11 кл.
Шамрук А.— Новодворская с. ш. Гродненской обл., 11 кл.
Яновский В.— Харьков, ФМЛ № 27, 11 кл.

По физике

Воскобойник И.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Гайдунько Д.— Алма-Ата, РСФМШИ, 10 кл.
Галанин А.— Сергиев Посад, с. ш. № 5, 11 кл.
Глазков В.— Коломна, с. ш. № 16, 11 кл.
Гребенев П.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 11 кл.
Григорян Т.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Гройсман Ю.— Ташкент, с. ш. № 260, 11 кл.
Гулгазарян Р.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
Ельников А.— Донецк, школа-лицей, 11 кл.
Жак С.— Тернополь, с. ш. № 1, 10 кл.
Занкович С.— Николаев, с. ш. № 42, 11 кл.
Кулик Ю.— Канев, с. ш. № 4, 9 кл.
Махмудов М.— Исфара, гимназия, 11 кл.
Мелентьев П.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Нежуренко А.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Ордабаев А.— Алма-Ата, РСФМШИ, 11 кл.
Пастухов Д.— Витебск, с. ш. № 39, 11 кл.
Петрайтис Д.— Вольск, с. ш. № 13, 11 кл.
Плетюхов М.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Терентьев А.— Канаш, с. ш. № 63, 11 кл.
Третьяков В.— Алма-Ата, РСФМШИ, 11 кл.
Файзуллаев А.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Чистый А.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Чичкан Д.— Барановичи, с. ш. № 9, 11 кл.
Шпагин А.— Мариуполь, с. ш. № 27, 11 кл.
Юдин Д.— Самара, с. ш. № 63, 11 кл.

Высоких результатов в решении задач «Задачника «Кванта» также добились следующие школьники (в этот список вошли победители конкурса, имеющие право участвовать в республиканских олимпиадах как победители прошлогодних олимпиад, учащиеся школ городов и интернатов, выставляющих свои команды сразу на Межреспубликанскую олимпиаду, а также те, кто не вошел в первый список из-за ограниченности числа предоставленных нам мест):

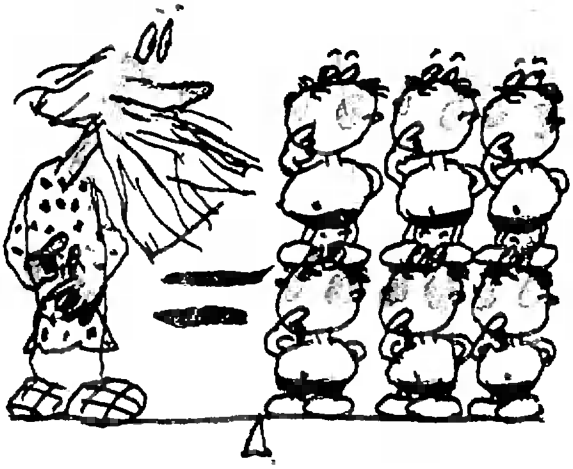
По математике

Бринюк В.— Донецк, Технический колледж, 10 кл.
Гайдай О.— Львов, с. ш. № 52, 11 кл.
Горенбургов Ю.— Санкт-Петербург, с. ш. № 242, 11 кл.
Зиновьев С.— Харьков, с. ш. № 122, 11 кл.
Изместьев И.— п. Суна Кировской обл., с. ш. № 2, 11 кл.
Исмаилов Р.— Санкт-Петербург, с. ш. № 239, 11 кл.
Кариаух Т.— Киев, с. ш. № 61, 11 кл.
Климов С.— Ижевск, с. ш. № 30, 11 кл.
Кожевников П.— Калуга, с. ш. № 24, 11 кл.
Корниенко А.— Днепропетровск, с. ш. № 36, 11 кл.
Кузьмич С.— Минск, МССШ при БГУ, 11 кл.

(Окончание см. на с. 35)

„Квант" для младших школьников

Задачи



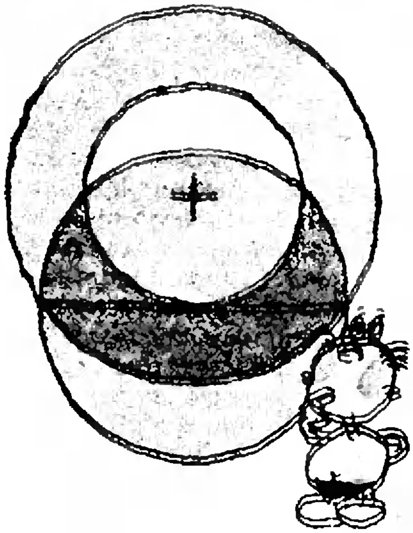
1. Дед старше внука в 6 раз. Сумма цифр его возраста также в 6 раз больше суммы цифр возраста внука, а разности этих цифр равны. Сколько лет деду и сколько внуку?

2. Месяц назад я купил на базаре килограмм картошки, литр молока и десяток яиц. В прошлое воскресенье картошка стала дороже в три раза, молоко — в четыре, яйца — в пять раз, и мне пришлось заплатить за ту же покупку 60 рублей. Сегодня картошка уже стоит в шесть раз дороже, чем месяц назад, молоко — в пять раз, а яйца лишь в четыре раза, и я заплатил за ту же покупку 66 рублей. Сколько денег я уплатил в первый раз?

3. Решите числовой ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. На каждую клетку шахматной доски положили по нескольку монет так, что суммы на каждых двух клетках, имеющих общую сторону, отличаются на одну копейку. Известно также, что на одной из клеток лежит 3 копейки, а на другой — 17 копеек. Какую сумму образуют монеты, лежащие на обеих диагоналях?

5. Даны две концентрические окружности. Проведена хорда большей окружности, касающаяся меньшей. На ней, как на диаметре, построена третья окружность. Докажите, что ограниченная ею площадь равняется площади кольца между первоначальными окружностями.



Эти задачи нам предложили Д. Ракчеев, Н. Антонович, М. Сафаралиев, В. Произволов и А. Судачин.

ВЕЗДЕСУЩИЙ РЫЧАГ

Кандидат физико-математических наук
С. ДВОРЯНИНОВ,
А. КОРЖУЕВ

Когда мы были помоложе,
Качались часто на качелях.
Теперь качаться любим тоже,
Не просто так — в научных
целях

Итак, простейшие качели:
Доска и ось посерединке;
Вот на концы доски мы сели,
Как это видно из картинки.

Тут обнаружилось, к досаде,
Различье в весе между нами:
Один из нас (солидный дядя!)
Болтает в воздухе ногами...

Холодновато показалось
Сидеть второму на песочке,
Заерзал он на пятой точке
И сдвинулся повыше малость.

И центр тяжести системы
Сместился, и пошли качели!..
Вот так заметки этой тему
Мы в гуще жизни подглядели.

Как видите, нам удалось уравновесить друг друга, пересадив более тяжелого из авторов ближе к оси качелей. Нисколько не сомневаемся, что вы на собственном опыте не раз убеждались в безотказности этого способа. Описанный эффект объясняется тем, что наши качели — не что иное, как рычаг.

С рычагом вы сталкиваетесь буквально на каждом шагу. Представьте себе, что вам понадобилось приподнять тяжеленный шкаф. Нет проблем: подсуньте под него дощечку покрепче и попробуйте поднять ее свободный конец. Шкаф довольно легко приподнимется. Вам захотелось полакомиться грецкими орехами, а скорлупа у них слишком прочна? Ничего нет проще: находим плоскогубцы (если у вас нет специальных щипцов для орехов), «крак!» — и это хитроумное приспособление, состоящее из пары рычагов, легко раскусывает твердый панцирь ореха... Ножницы по металлу (тоже пара рычагов) режут жесть почти так же легко, как обычные ножницы режут бумагу... Лопата выворачивает здоровенный ком земли, но попытайтесь-ка копнуть одним ее лезвием!..

Что же это такое — рычаг? Из приведенных примеров можно сделать вывод о его основном свойстве: он обладает способностью безо всяких устройств, развивающих дополнительную силу, увеличить ту силу, что приложена к одному из его концов!

Чтобы понять, в чем тут дело, представим себе «идеальный рычаг» в виде невесомого стержня, закрепленного на оси O так, что он может свободно вращаться вокруг этой оси в вертикальной плоскости. Пусть к концам стержня приложены некоторые силы, действующие также в вертикальной плоскости, например подвешены два

Стихи А. Котовой.

груза: один весом P_1, другой весом P_2. Давайте разберемся, как уравновесить такой рычаг.

Если $P_1=P_2$, совершенно ясно, что для равновесия такой системы достаточно, чтобы ось нашего рычага совпадала с серединой стержня (это следует из симметрии).

Теперь пусть $P_1 \neq P_2$. Для начала разберем такой пример. Пусть стержень имеет длину 5 см, а грузы на его концах — массы 4 г и 6 г. Пусть эти грузы — однородные палочки, первая длиной 4 см, а вторая — 6 см (это значит, что каждый сантиметр длины такого груза имеет массу 1 г), причем каждая из них подвешена к стержню за свою середину (рис. 1). В таком случае, если рычаг был уравновешен, как бы мы ни поворачивали палочки относительно стержня, равновесие не нарушится. Теперь повернем наши грузы так, чтобы они оказались горизонтальны (т. е. вытянулись вдоль стержня). Их длина удачно оказалась такой, что наши палочки сомкнулись, образовав однородную палку длиной 10 см (рис. 2). Ее уравновесить ничего не стоит — достаточно найти середину и там установить ось. Посмотрим, на каком расстоянии от концов стержня AB оказалась точка O. Видно, что $AO=3$ см, $BO=2$ см и

$$AO:BO=P_1:P_2.$$

Нетрудно догадаться, что дело тут не в том, что рычаг и грузы были специально подобраны. При длине рычага l и весах грузов P_1 и P_2 всегда можно проделать такой мысленный эксперимент, «вытянув» грузы до нужной длины (так, чтобы их длины в сумме составляли $2l$).

Итак, мы получили основной закон равновесия рычага: *рычаг находится в равновесии тогда, когда силы, действующие на него, обратно пропорциональны плечам.* Для тех, кто не знает, что такое плечо силы, сообщаем, что это — кратчайшее расстояние между точкой опоры и прямой, вдоль которой сила действует на рычаг.

Метод, при помощи которого мы добились равновесия, имеет весьма почтенный возраст — более двух тысячелетий. Им пользовался сам Архимед (287—212 годы до нашей эры), один из величайших ученых древности — механик, математик и философ. (Знаменитый математик Лейбниц сказал о нем: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современной математики».) Рассказывают, что Архимед, открыв правило рычага, воскликнул на радостях: «Дайте мне точку опоры — и я переверну Землю!»

Теоретически такое заявление нисколько не противоречит тому, что мы узнали о рычагах, но осуществить на практике его довольно затруднительно. Сейчас вы поймете, почему.

Давайте посчитаем, какой наименьшей длины рычаг потребуется Архимеду, чтобы выполнить свое обещание. Предположим, что на Архимеда и Землю действуют силы, пропорциональные их массам. Тогда на Архимеда действует сила $F_A=m\cdot k$, где m — масса Архимеда, k — коэффициент пропорциональности, а на Землю действует сила $F_З=M\cdot k$ (с тем же коэффициентом пропорциональности), где M — масса Земли (рис. 3). По закону рычага отношение расстояний от точки опоры до Земли и до Архимеда равно

$$\frac{F_З}{F_A}=\frac{M\cdot k}{m\cdot k}=\frac{M}{m}=\frac{6\cdot 10^{24}\text{ кг}}{70\text{ кг}}\approx 10^{23}\ (!).$$

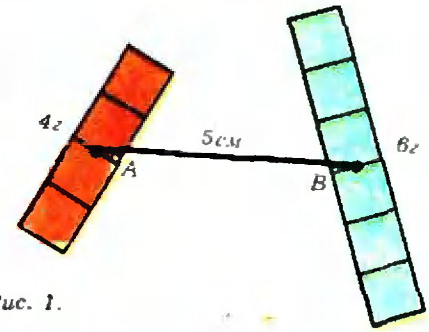


Рис. 1.

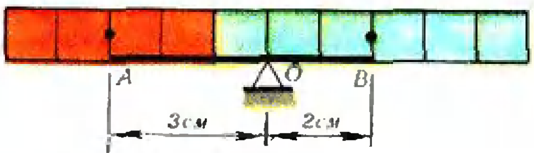


Рис. 2.

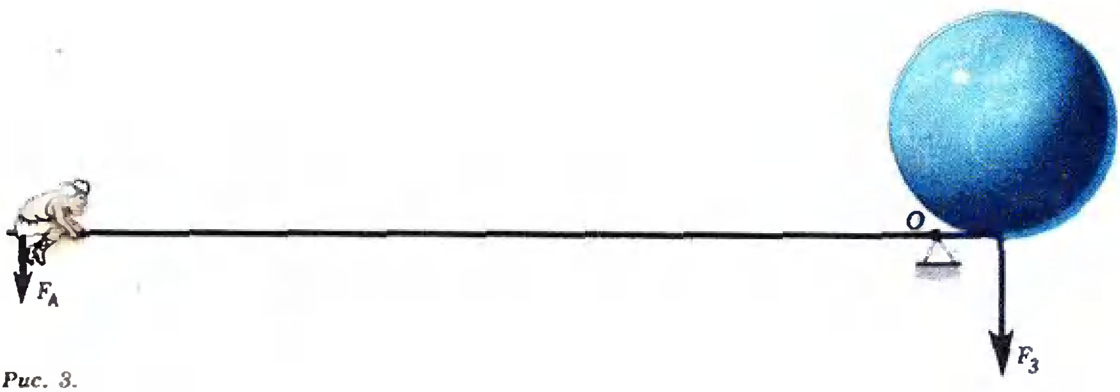


Рис. 3.

Значит, если Архимеду удастся укрепить нашу планету на расстоянии 1 м от точки опоры, то ему самому придется сесть в космический корабль и отправиться в дальнее путешествие на расстояние 10^{23} м. Такое расстояние даже свет, быстрее которого ничто не движется в нашем мире, пролетел бы лишь за $3 \cdot 10^{14}$ с, т. е. за 10 миллионов лет! Но и это еще не самое страшное,— чтобы сдвинуть нашу планету хотя бы на 1 мм, он должен будет сместить свой конец рычага на расстояние, в 10^{23} раз большее, т. е. на 100 000 000 000 000 000 км!

Опрометчиво, оказывается, давать такие обещания!

Опустимся теперь с небес на Землю. Мы предлагаем вам разобраться, как работает устройство, более древнее, чем закон, на котором основано его действие. Речь идет о колодезном «журавле», известном еще египтянам во времена фараонов. Конструкция оказалась столь удачной, что дожила до наших дней и до сих пор трудится, «не покладая своего рычага», в некоторых деревнях. Почему такой колодец называли на Руси журавлем? Он и вправду похож на громадную птицу с длинной шеей и коротким хвостом, которая стоит на одной ноге, опустив клюв к земле.

«Шея» и «хвост» этой птицы — два плеча рычага, закрепленного на столбе-«ноге». К «хвосту» подвешен груз-противовес (обычно старый стертый мельничный жернов), на конце «шеи» — длинный шест-«клюв» с ведром (рис. 4). Пусть, для определенности, длины плеч этого рычага относятся как 1:6, а вес жернова 600 Н (т. е. масса его около 60 кг). Чтобы опустить ведро в воду, приходится тянуть шест вниз с силой 100 Н. Это совсем не тяжело, надо лишь чуть подтянуться на шесте, и он будет опускаться. Когда же ведро наполнится водой (объем обычного ведра — 10 литров, поэтому его вес будет примерно 100 Н), система окажется в состоянии безразличного равновесия, и даже маленький ребенок сможет достать воду из колодца. Надо лишь, перебирая руками, подталкивать шест вверх.

Продолжая двигаться вглубь истории рычага, приведем еще один пример, гораздо более древний, чем «журавль». Это... ваша рука! В самом деле, роль рычага играет здесь кость предплечья (часть руки между кистью и локтем), точка опоры — локоть. Когда вы берете в руку какой-нибудь груз (кирпич, например), на рычаг действуют вес груза в точке B и сила упругости мышцы в точке A (рис. 5).

Всем известно из личного опыта, что легче удержать груз в согнутой руке, чем в вытянутой горизонтально. Правило рычага поможет понять,

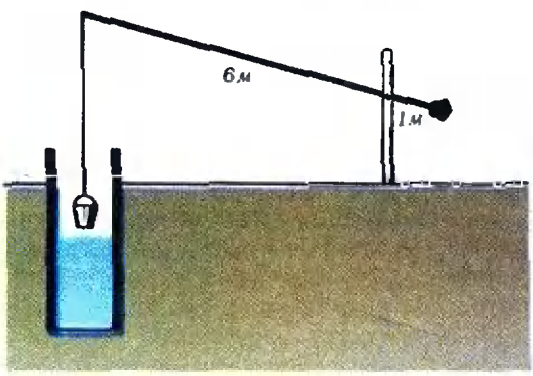


Рис. 4.

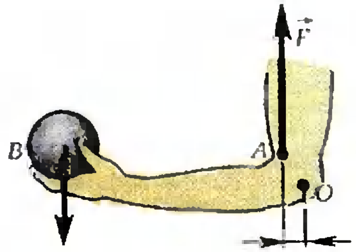


Рис. 5.

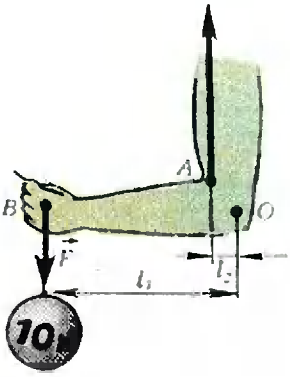


Рис. 7.

почему. Посмотрите на рисунок 6: сила $\vec{F}$, с которой мышца действует на «рычаг», направлена не перпендикулярно к кости (как это было бы в случае на рисунке 5), а составляет с продольной осью рычага очень малый угол. Поэтому плечо силы $\vec{F}$ оказывается заметно меньше, чем раньше, когда рука была согнута. Теперь, чтобы уравновесить тот же самый груз, мышце придется развить большую силу.

Но не это самое интересное. Давайте выясним, какое усилие развивает мышца, чтобы поднять груз массой 10 кг. Расстояние l_1 от точки опоры до груза примерно в 8 раз больше, чем расстояние l_2 от конца мышцы до опоры (рис. 7). Значит, мускул действует на рычаг с силой, в 8 раз большей веса груза, т. е. около 800 Н. Выходит, рука-рычаг уменьшает мышечную силу?! Зачем?

Вспомните задачу об обещании Архимеда: колоссальный выигрыш в силе приводит к не меньшему проигрышу в расстоянии и, следовательно, во времени. Но, обратно, проигрывая в силе, мы во времени выиграем! Благодаря устройству руки она движется в 8 раз быстрее, чем управляющие ею мышцы. И это замечательно,— в противном случае наших медлительных предков давно бы съели конкуренты в борьбе за место под солнцем. Кто бы тогда написал эту статью и кто бы прочитал ее?..

Мы уже достигли столь далеких времен, что можем встретить лишь рычаги типа «рука» у ископаемых динозавров. Поэтому вернемся в более близкую к нам эпоху — к тем временам, когда человечество изобрело весло. Вы, конечно, уже поняли, что это тоже рычаг, осью которого служит уключина. Часть весла с рукояткой короче, чем та, что с лопастью, следовательно, перед нами рычаг, рассчитанный на выигрыш в расстоянии. Например, весло длиной 2 м, закрепленное на расстоянии 40 см от точки приложения силы со стороны руки, увеличивает скорость, с которой движется его верхний конец, в 4 раза. Перемещая рукоять весла со скоростью 0,5 м/с, гребец посылает лодку вперед со скоростью 2 м/с.

Еще один пример весьма древнего

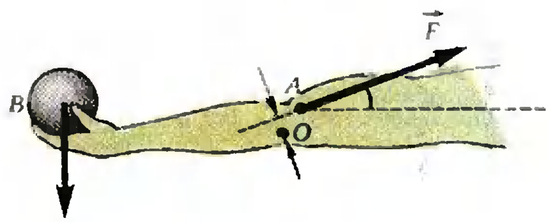


Рис. 6.

Рис. 8.

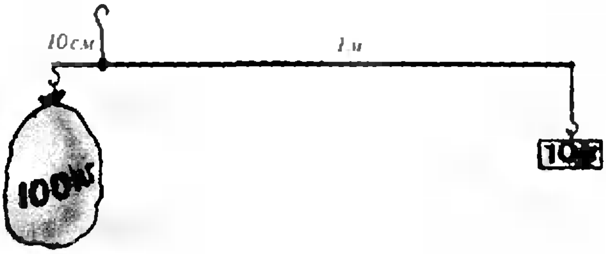


Рис. 9.

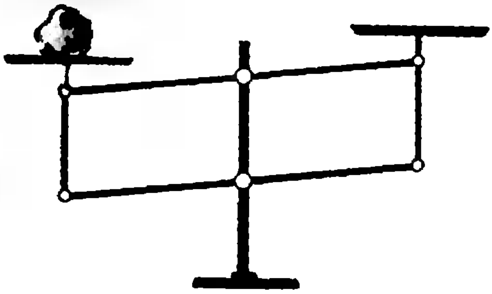


Рис. 10.

использования нашего героя, рычага,— грозное метательное оружие, спалившее за свою историю немало городов и кораблей. Это катапульта, принцип действия которой основан на инерции и все на том же правиле рычага. Вы можете сделать ее модель из... кастрюли, деревянной ложки и резинки. Резинку привязывают одним концом к ручке кастрюли, а другим — к середине ложки. Ручку ложки упирают в угол между дном и стенкой кастрюли (рис. 8). Теперь положим кастрюлю на стол так, чтобы она опиралась на него свободной ручкой и краем дна. Катапульта готова. Заложите в ложку снаряд (например, небольшую картофелину), оттяните ее вниз и отпустите. Ложка, притягиваемая резинкой, подскочит вверх и ударится о край кастрюли, а снаряд полетит, описывая в воздухе красивую дугу.

У этой конструкции есть два очевидных достоинства. Во-первых, для того, чтобы натянуть резинку, не требуется больших усилий: ведь мы тянем за более длинное плечо рычага. Во-вторых, расстояние, которое проходит «заряженный» конец ложки, вдвое больше длины растянутой резинки. Поэтому и скорость его вдвое выше, чем та, с какой резинка заставляет двигаться середину ложки. Таким образом, катапульту не так уж сложно «насторожить», а стреляет она довольно далеко.

Настоящая катапульта, не сильно отличавшаяся от этой игрушки, была когда-то крупнейшим достижением военной техники. Ее заряжали бочонком со смолой и непосредственно перед выстрелом поджигали «снаряд». Гигантская «ложка», подброшенная пружиной, взлетала, ударялась о специальную перекладину и останавливалась, а бочонок летел, роняя огненные струи горящей смолы и наводя панику в рядах противника...

Оставим, однако, дела военные и расскажем об одном из древнейших применений рычага в мирных целях. Речь пойдет о взвешивании товаров. Простейшие рычажные весы, равноплечные, по свидетельствам археологов, использовались уже в древнем Египте. Они верно служат человечеству и в наше время, но большие тяжести на них взвешивать неудобно. Не так-то просто подобрать гири, чтобы уравновесить несколько центнеров зерна! Поэтому были изобретены неравноплечные весы, например такие, как десятичный безмен, изображенный на рисунке 9. Вы уже столько знаете о рычаге, что легко поймете преимущества такой конструкции.

Ну вот, кажется, мы сказали все, что хотели... Нет, подождите минутку!

Нам жаль, что мы рассказ прервали
О том, как взвешивают грузы,
Не помянув про Роберваля*),
Средневекового француза.

Ведь показаний не меняют
Его весы (рисунок десять),
Будь в центре чашки или с краю
Тот груз, который надо взвесить.

Сам Роберваль не знал причины
Столь удивительного свойства
И вплоть до собственной кончины
Не понял, в чем же соль устройства...

Мы оба будем очень рады
Узнать, что вы нашли ответ.
Не обещаем вам награды,
Но скажем: верный или нет.

*) Jille Personne de Roberval (1602—1675). Свои весы выставил в Парижской академии наук в 1669 году. Лишь в начале XIX века удалось объяснить, почему расположение грузов на чашках не влияет на показания весов.

Конкурс «Математика 6—8»

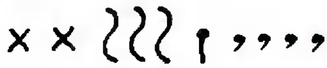
Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач, по 3 в каждом номере журнала, начиная с девятого. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 мая 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

19. В футбольном турнире участвовали 15 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Могло ли случиться, что число побед у каждой команды оказалось равным числу ее ничьих? Какой будет ответ, если в турнире участвовали 16 команд? 17 команд?

С. Токарев

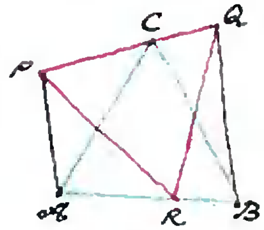
20. Ивашка Кудряшкин из рассказа Аркадия Гайдара «Горячий камень» обнаружил на камне загадочную печать — два креста, три хвоста, дырка с палочкой и четыре запятые:



Допустим, что это — зашифрованная запись десятизначного числа, являющегося полным квадратом. Какую цифру означает дырка с палочкой?

И. Акулич

21. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне



PQ, а вершина R — на стороне AB. Докажите, что четырехугольник $ABQP$ — трапеция.

В. Произволов

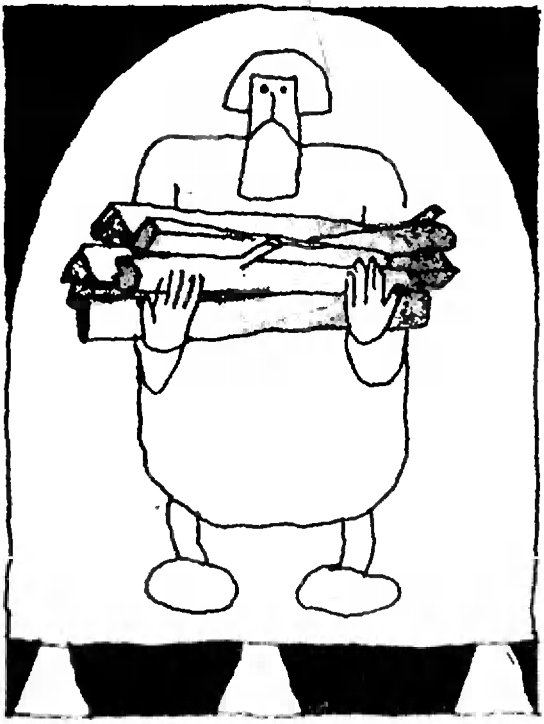
Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 28)

Кукушкин А.— Москва, с. ш. № 54, 10 кл.
Мокляк М.— Киев, ФМШИ, 10 кл.
Павличков С.— Евпатория, с. ш. № 6, 11 кл.
Панов Д.— Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
Перельман Е.— Санкт-Петербург, с. ш. № 239, 10 кл.
Пиковский В.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Сарсембаев А.— Аркалык, гимназия, 11 кл.
Турчин Е.— Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Хасин М.— Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
Ходзинский Ю.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.

По физике

Антипов Д.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Горгадзе В.— Нальчик, с. ш. № 19, 11 кл.
Гревцев А.— Москва, СУНЦ МГУ, 11 кл.
Гуляев Н.— Нижний Новгород, с. ш. № 82, 11 кл.
Дибров С.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Дудий С.— п. Комсомольский Харьковской обл., с. ш. № 2, 10 кл.
Егоров Ю.— Киев, ФМШ № 2, 11 кл.
Зозуля И.— Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Ивченко Н.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Клембовский М.— Николаев, с. ш. № 42, 11 кл.
Козлов В.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 11 кл.
Маравин Ю.— Евпатория, с. ш. № 6, 11 кл.
Мотрунич А.— Ужгород, с. ш. № 1, 11 кл.
Ольховец А.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Островский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. № 566, 11 кл.
Потишко Д.— Харьков, ФМШ № 27, 10 кл.
Соклаков А.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Тимощук С.— Ровенская обл., Крыловская с. ш., 11 кл.
Толпекин В.— Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Шпырко О.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Шутенко Т.— Мариуполь, с. ш. № 41, 11 кл.
Якупов Р.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.
Янченко Р.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.



Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Закон сохранения импульса и маневры космического корабля» предназначена девятиклассникам, заметка «Откуда берется магнетизм?» — десяти- и одиннадцатиклассникам. Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Закон сохранения импульса и маневры космического корабля

Космический корабль приближался к планете, и его необходимо было перевести на околопланетную орбиту. Топлива у космонавтов оставалось немного, и использовать его следовало наиболее эффективно. Корабль снабжен тремя одинаковыми двигателями. Можно включить все три двигателя одновременно (чтобы каждый из них израсходовал одну треть массы топлива), а можно вводить двигатели в работу последовательно — один за другим. Как же поступить?

Пока остается немного времени до включения системы торможения, порассуждаем и мы вместе с командиром корабля и постараемся найти оптимальный способ торможения. Воспользуемся для этого одним из фундаментальных законов механики — законом сохранения импульса*).

Согласно определению, импульс частицы массой m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, равен $\vec{p}=m\vec{v}$. Если мы имеем дело с системой частиц, то импульс системы есть сумма импульсов отдельных частиц: $\vec{p}=\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$. Рассмотрим систему двух взаимодействующих частиц (их массы m_1 и m_2, скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$), в которой внешние силы отсутствуют. Такая система называется замкнутой. Обозначим через $\vec{F}_{12}$ силу, с которой частица *1* действует на частицу *2*, а через $\vec{F}_{21}$ — силу, с которой частица *2* действует на частицу *1*. Тогда, в силу третьего закона Ньютона,

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0.$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для каждой из частиц:

$$m_1\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}=\vec{F}_{21},$$

$$m_2\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}=\vec{F}_{12}.$$

Умножим оба уравнения на Δt и сложим почленно. Получаем

$$m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=0,$$

или

$$\Delta(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)=0,$$

т. е. изменение импульса системы взаимодействующих частиц равно нулю. Следовательно, для замкнутой системы частиц полный импульс сохраняется:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\vec{p}=\text{const}.$$

Заметим, что если бы частицы находились в каком-либо внешнем поле,

*) О «судьбе» импульса и некоторых других понятий механики подробно рассказывалось в «Кванте» № 5 за 1986 года (*Прим. ред.*).

то силы, действующие на частицы, не были бы скомпенсированы и импульс перестал бы быть сохраняющейся величиной.

Вернемся теперь к нашей ракете. Пусть масса топлива, которое космонавты могут потратить на торможение, равна m, а скорость истечения газов из сопел двигателей равна v.

Рассмотрим первый вариант торможения, когда двигатели включаются одновременно. Чтобы проще было наблюдать за событиями, присоединимся к космонавтам, т. е. перейдем в систему отсчета, связанную с ракетой. В этой системе собственная начальная скорость ракеты вместе с топливом равна нулю. Обозначим скорость, которую приобретет корабль после сжигания всего топлива, через $\vec{v}_1$, а массу корабля — через M. Из закона сохранения импульса имеем

$$M\vec{v}_1+m\vec{v}=0.$$

Предположим, что корабль движется вдоль оси X декартовой системы координат. Спроектировав все векторы на эту ось, получаем

$$Mv_1-mv=0.$$

Отсюда находим скорость, которую приобретет корабль после того, как двигатели отработают все топливо:

$$v_1=\frac{m}{M}v.$$

Во втором варианте торможения необходимо рассмотреть три последовательных процесса, в каждом из которых расходуется масса топлива, равная $m/3$. Когда сгорит первая треть топлива, корабль приобретет скорость

$$v_2'=\frac{m}{3(M+2m/3)}v=\frac{m}{3M+2m}v$$

и импульс корабля станет равным $(M+2m/3)v_2'$. Запишем теперь закон сохранения импульса для этого момента и для момента, когда будет израсходована вторая треть топлива:

$$\left(M+\frac{2}{3}m\right)v_2'=\left(M+\frac{1}{3}m\right)v_2''-\frac{m}{3}(v-v_2').$$

Поясним это равенство. Мы задали скорость истечения газов v относительно неподвижной ракеты. После первого этапа торможения ракета приобрела скорость v_2', и, следовательно, скорость истечения газов относительно выбранной системы отсчета будет не v, а $v-v_2'$, что и отражено в последнем члене нашего уравнения. После прохождения второго участка торможения скорость корабля будет равна

$$v_2''=v_2'+\frac{m}{3M+m}v.$$

Запишем закон сохранения импульса в третий раз:

$$\left(M+\frac{m}{3}\right)v_2''=Mv_2-\frac{m}{3}(v-v_2'').$$

Для окончательной скорости корабля в результате трех последовательных этапов торможения получаем

$$v_2=\frac{m}{3M+2m}v+\frac{m}{3M+m}v+\frac{m}{3M}v.$$

Взглянув на результат, т. е. на выражения для скоростей v_1 и v_2, мы видим, что при последовательном включении двигателей дополнительная скорость, приобретаемая ракетой, меньше, чем при одновременном. Дело в том, что при последовательном включении часть топлива расходуется на сообщение скорости (v_2', v_2'') оставшемуся топливу.

Теперь нетрудно понять, какое решение должен принять командир космического корабля.

М. Анфимов

Откуда берется магнетизм?

Как вы знаете, каждый электрический заряд (заряженное тело, заряженная частица) окружен электрическим полем. Если в этом поле находится другой заряд, на него действует электрическая сила. Вокруг всякого движущегося электрического заряда существует, кроме того, магнитное поле. Оно действует на любой другой движущийся заряд (например, на проводник с током) магнитной силой.

Мы не можем ответить на вопрос, почему между зарядами действуют электрические силы притяжения и отталкивания, хотя физика и стремится выяснить не только как происходит то или иное явление, но и почему оно происходит и почему оно происходит так, а не иначе. На поставленный же вопрос можно, пожалуй, дать только такой ответ: так устроен мир!

Уместно, конечно, спросить: а почему электрический заряд, стоит только ему начать двигаться, тут же «обзаводится» еще одним силовым полем — магнитным? Вот на это «почему» можно, оказывается, дать ответ, что мы и попытаемся сделать в этой заметке.

Если для возникновения магнитного поля нужно, чтобы электрический заряд двигался, то важную роль здесь должна играть скорость его движения. А она, скорость, различна относительно разных систем отсчета. Но может ли физическое явление (в нашем случае существование магнитного поля и его действие на движущиеся в нем заряды) зависеть от того, какую систему отсчета выбрал наблюдатель? Ясно, что не может.

О принципе относительности. Из курса физики девятого класса вам известно, что законы механики одинаковы для всех инерциальных систем отсчета. В этом состоит принцип относительности Галилея, установленный им в XVII веке. В начале XX века Эйнштейн предложил новую, обобщенную формулировку этого принципа: не только законы механики, но и все законы природы, в том числе и законы электродинамики, одинаковы относительно любых инерциальных систем отсчета. Это — один из постулатов так называемой специальной теории относительности, или, как ее еще называют, релятивистской теории. Она-то и позволит нам понять, откуда берется магнетизм.

Представим себе, что параллельно металлической проволоке, по которой течет постоянный электрический ток I, движется со скоростью v некоторый отрицательный заряд q (рис. 1). Для простоты рассуждений примем, что скорости заряда и электронов в проводнике с током одинаковы и по модулю, и по направлению ($v_{-}=v$). Понятно, что речь идет о скоростях относительно системы отсчета, связанной с проволокой (как это и показано на рисунке 1). Обозначим эту систему отсчета K.

Электрическая сила на заряд q не действует, потому что проволока с током электрически нейтральна. Ведь в проволоке помимо движущихся отрицательно заряженных электронов есть и положительно заряженные ионы, образующие кристаллическую решетку, так что заряды ионов и электронов компенсируют друг друга. Относительно системы K ионы можно считать покоящимися ($v_{+}=0$).

Но на заряд q действует магнитная сила $\vec{F}_м$, модуль которой определяется формулой Лоренца

$$F_м = qvB,$$

где B — магнитная индукция поля в том месте, где находится заряд q. Эта сила перпендикулярна векторам $\vec{B}$ и $\vec{v}$, причем по правилу левой руки легко установить, что направлена она в сторону проволоки. В нашем случае достаточно очевидно, что величина магнитной индукции пропорциональна току I в проводнике и обратно пропорциональна расстоянию r от проводника до заряда:

$$B \sim \frac{I}{r}.$$

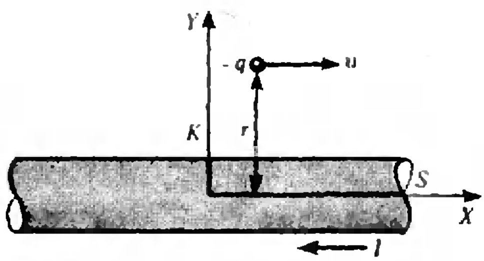


Рис. 1.

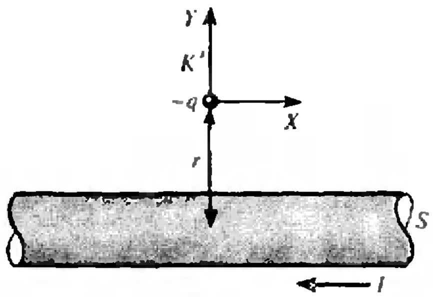


Рис. 2.

Сила тока в свою очередь пропорциональна концентрации n и скорости свободных носителей заряда, т. е. скорости электронов v:

$$I \sim nv.$$

Таким образом, магнитная сила

$$F_м \sim \frac{qnv^2}{r}.$$

А теперь рассмотрим то же явление, выбрав другую систему отсчета. Свяжем систему координат не с проволокой, а с зарядом q, и обозначим ее K' (рис. 2). Относительно этой системы заряд q покоится, покоятся и электроны в проводнике ($v_- = 0$). Зато движется — со скоростью, равной v, но направленной влево, вся проволока, а значит, и положительные ионы ($v_+ = -v$).

Поскольку относительно нашей новой системы отсчета K' заряд q покоится, магнитная сила на него действовать не может. Что же случилось с силой $\vec{F}_м$, которая действовала на заряд, когда мы пользовались системой отсчета K? Могла ли исчезнуть сила только из-за того, что мы перешли к другой системе отсчета? Конечно, нет. Значит, сила, заставляющая заряд q приближаться к проволоке, должна все-таки существовать. И она, разумеется, существует. Но что это за сила? За ответом на этот вопрос обратимся к одному из результатов специальной теории относительности.

Удивительное свойство пространства, открытое Эйнштейном. До того как появилась теория относительности, считалось очевидным, что расстояние между двумя точками в пространстве (например, длина тела) величина вполне определенная. В том смысле определенная, что оно, это расстояние, не может измениться при переходе от одной системы отсчета к другой. Это казалось настолько очевидным, что никому и в голову не приходило усомниться в этом. Эйнштейн был первым, кто подверг сомнению это никем и никогда не доказанное утверждение.

Оказалось, что в действительности длина тела в направлении его движения (но не в направлении, перпендикулярном ему) может быть... любой — от некоторой максимальной до нулевой. Длина тела максимальна, когда оно покоится относительно выбранной системы отсчета; обозначим эту длину l_0. Если же тело движется со скоростью v, то длина l тела уже другая, меньшая. И связаны l и l_0 таким соотношением:

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где c — константа, равная скорости света, одна из так называемых мировых констант. Заметим, кстати, что второй постулат теории относительности состоит в том, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Следует также добавить, что скорость c — предельная для любого тела: нет такой системы отсчета, относительно которой какое-либо тело могло бы двигаться не только со скоростью, превышающей c, но даже и равной ей. Отношение v/c (и, конечно, v^2/c^2) всегда меньше единицы.

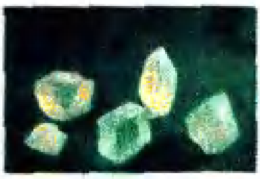
Уравнение для l показывает, что тело, движущееся относительно некоторой системы отсчета, короче того же тела, когда оно покоится относительно нее. Вот это-то обстоятельство и позволяет понять, что́ за сила действует на заряд q в системе отсчета K'.

Два облика одного явления. При переходе из системы отсчета K в систему K' длина проволоки оказывается

(Окончание см. на с. 42)

Зеркальная симметрия

Вот по поляне порхает яркая бабочка. Ее крылышки кажутся совершенно одинаковыми. И, как бы для того, чтобы это подтвердить, она садится на цветок, складывает их, прикладывая одно к другому, и мы воочию видим, что форма одного крыла в точности повторяет форму другого.



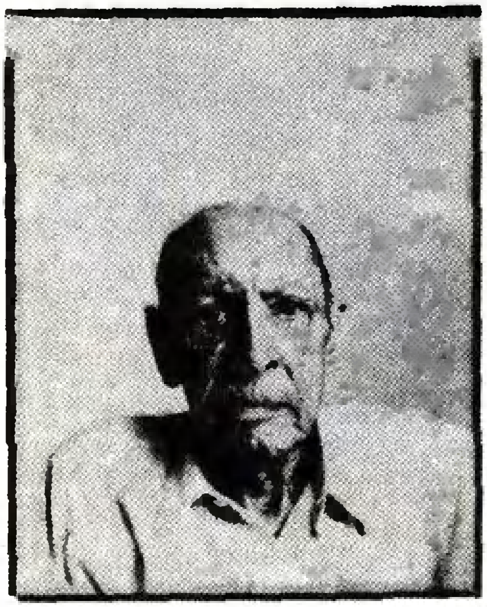
Значит, крылья у бабочки действительно одинаковы? Нет. Возьмите точную копию правого крыла и поставьте его на место левого — у вас ничего хорошего не получится: либо яркая раскраска окажется не с той стороны, либо при складывании крылья не будут совпадать.

Точно так же различаются наши левая и правая рука, левое и правое ухо.

А теперь возьмите зеркало (лучше без оправы) и поставьте его вертикально на рисунок бабочки так, чтобы край зеркала прошел ровно посередине. И тут окажется, что половинка рисунка вместе с ее отражением в зеркале составляют прежний рисунок. Предметы, одна половина которых может быть получена как зеркальное отражение другой, называются зеркально симметричными, а само изображение — зеркальной симметрией.

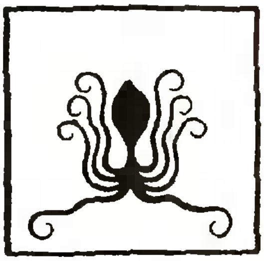
Симметричны и творения природы: животные, листья деревьев, кристаллы, насекомые,— и творения человеческих рук: дома, автомобили, самолеты, столы, стулья, ложки, вилки...

Вернемся к прибору, осуществляющему симметрию,— к зеркалу. Можно получить много интересных и неожиданных изображений, если прикладывать его к разным предметам и рисункам. Наверное, самой большой неожиданностью станет эксперимент с вашей фотографией. Мы абсолютно уверены в том, что наше лицо совершенно симметрично. Зеркало же покажет, что это не так: полностью симметричное изображение, полученное с помощью зеркала, не очень похоже на вас. В природе вообще не встречается абсолютная симметрия. Сколь симметричными ни казались бы те же листья, кристаллы и бабочки, внимательный наблюдатель заметит мелкие отличия (форму жилок, трещинки, цветовые пятна)... Может быть, это обстоятельство стало причиной следующего канона построения католических храмов: они должны быть симметричны в главных деталях, но в мелких деталях должны быть различия между левой и правой частями.



Последняя фотография композитора И. Стравинского

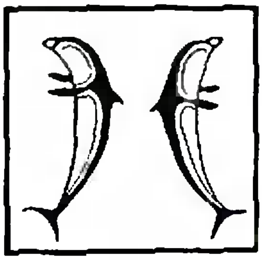
Понятие симметрии является одним из главных в таких науках, как физика и кристаллография.



Зеркальная симметрия может помочь в решении некоторых геометрических задач, например такой. Путешественник хочет пройти из пункта A в пункт B, находящийся на том же берегу прямолинейного канала, набрав при этом воды из канала. Какой путь является кратчайшим?

Чтобы решить задачу, достаточно зеркально отразить пункт B относительно берега канала и провести отрезок, соединяющий полученную точку B_1 с точкой A. Точка пересечения этого от-

резка с берегом и укажет то место, где следует набрать воды из канала и откуда затем нужно направиться к пункту B. Зеркало подтверждает справедливость такого вы-

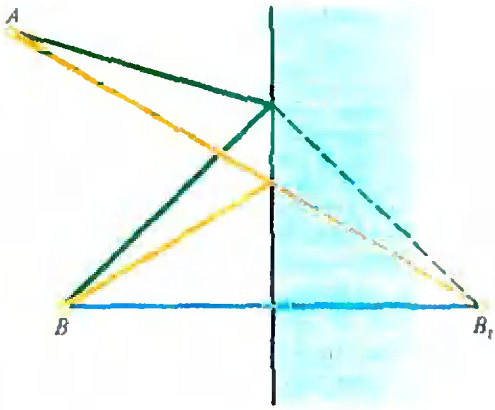


бора, поскольку такой путь соответствует прямолинейному пути из точки A в точку B_1, а любой другой — движению по ломаной.

Симметрия проявляется и в алгебре, особенно ярко в так называемых симметрических многочленах. Это многочлены от нескольких переменных, которые не изменяются, если некоторые переменные поменять местами. Например, симметрическими многочлена-

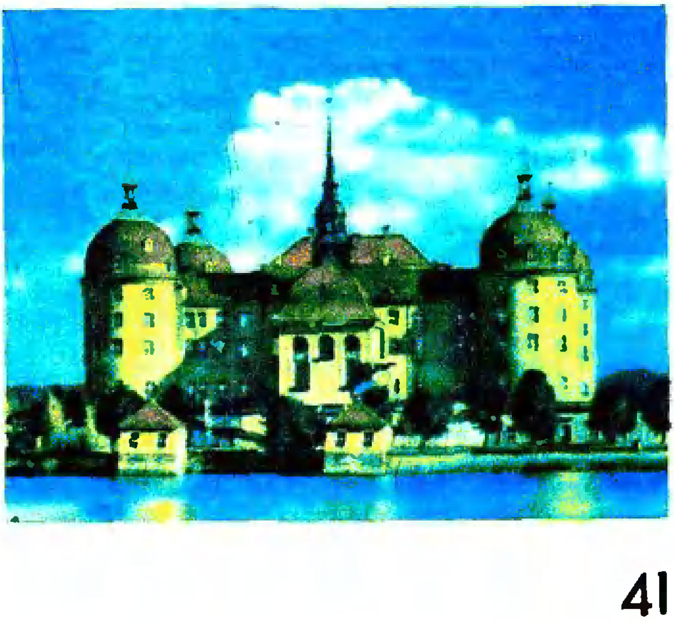
ми от двух переменных являются многочлены: $x+y$, xy, x^2+y^2, $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$. Первые два многочлена, самые простые, называют элементарными симметрическими многочленами и обозначают так: $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$. Оказывается, что любой симметрический многочлен от двух переменных может быть выражен через них. Так,

$$x^2+y^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=\sigma_1^3-\sigma_1\sigma_2.$$



Любопытно наблюдать симметрию в буквах и словах. Например, буквы М, П, Т, Ш имеют вертикальную ось симметрии, В, З, К, С, Э — горизонтальную. А буквы Ж, Н, О, Ф, Х имеют по две оси симметрии! Симметрию можно увидеть и в целых словах, таких как КАЗАК, ШАЛАШ, которые читаются одинаково, как слева направо, так и справа налево; слово же ПОТОП не только читается одинаково с любого конца, но и имеет настоящую вертикальную ось симметрии. А вот и целые фразы с таким свойством (если не учитывать пробелы между словами): «Искать такси», «Аргентина манит негра», «Ценит негра аргентинец», «Леша на полке клопа нашел». Такие слова называются палиндромами. В поисках совершенной красоты стиха палиндромами увлекались многие поэты. Некоторые композиторы, в том числе и великий Бах, писали мелодии, которые звучали одинаково при чтении их слева направо и справа налево, т. е. музыкальные палиндромы. Но самые впечатляющие результаты дает симметрия в изобразительном искусстве. Об этом художники догадались давным-давно. Подтверждением тому — эта шумерская фреска и эта древнегреческая мозаика — произведения неизвестных великих мастеров...

Материал подготовил А. Савин



меньшей, но неизменной остается площадь ее поперечного сечения S. Поэтому уменьшается объем проволоки, равный lS, и стало быть, увеличивается концентрация частиц, т. е. положительных ионов, в проволоке. Если концентрацию ионов в системе отсчета K обозначить n_+, а в системе K' — n'_+, то связь между ними выразится формулой

$$n'_+ = \frac{n_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Но в нашей проволоке есть и отрицательно заряженные частицы — электроны. Обозначим их концентрации соответственно n_- и n'_-. В системе отсчета K' электроны покоятся, а в системе K движутся со скоростью v, поэтому можно записать

$$n_- = \frac{n'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

откуда

$$n'_- = n_-\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Итак, мы видим, что в системе K' концентрация электронов стала меньше, а концентрация ионов — больше. А это означает, что в движущейся системе отсчета наша проволока «выглядит» положительно заряженной и на отрицательный заряд q она действует с электрической силой, направленной к проволоке, т. е. так же, как магнитная сила в системе K.

Сокращение длины тела — не единственный результат теории относительности. При переходе от системы K к системе K' изменяется еще и течение времени — оно замедляется. Преобразуется и выражение для силы. Если учесть все это, то можно показать (но не в нашей маленькой заметке), что не только по направлению, но и по модулю сила, теперь уже электрическая, не отличается от предыдущей магнитной силы. Значит, само физическое явление не изменилось при переходе от одной системы отсчета к другой, как это и должно быть, но магнитная сила (в системе K) приобрела (в системе K') электрическое обличье.

Этот не очень простой анализ показывает, что природу магнетизма нельзя понять, если не обратиться к теории относительности. Магнетизм — это, как говорят, релятивистское явление.

И еще один важный вывод. Мы видели, что в системе отсчета K сила, приложенная к заряду q, имеет чисто магнитный характер, а в системе K' — чисто электрический. Соответственно этому мы говорим о магнитном поле (система K) или об электрическом (система K'). В этом находит отражение замечательный факт: электрические и магнитные силы — это две части одного физического явления — электромагнитного взаимодействия зарядов. Если, в отличие от рассмотренного нами примера, заряды движутся с переменной скоростью (ускоряются, замедляются, совершают колебания) или по проводникам текут переменные токи, электрическое и магнитное поля уже не проявляются раздельно, а образуют единое электромагнитное поле. Существуют уравнения, их называют уравнениями Максвелла, которые дают полное электромагнитное описание электрических и магнитных явлений. Оно уже не зависит от выбора системы отсчета.

А. Кикоин

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Во сколько раз изменится полезная мощность вентилятора при увеличении скорости его вращения в два раза?

2. Тонкая пластинка массой $m=10$ кг лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружина жесткостью $k=100$ Н/м. Какую работу нужно совершить, чтобы за пружину поднять пластинку на высоту $h=1$ м от поверхности стола?

3. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шар. На какой угол надо отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была в 4 раза больше минимальной?

4. Два одинаковых по размеру шара висят на тонких нитях, касаясь друг друга. Первый шар отводят в сторону и отпускают. После упругого соударения шары поднимаются на одну и ту же высоту. Найдите массу первого шара, если масса второго $m_2=0{,}6$ кг.

5. Тележка массой $m_1=50$ кг движется со скоростью $v=2$ м/с по гладкой горизонтальной поверхности. На тележку с высоты $h=20$ см падает груз массой $m_2=50$ кг и остается на тележке. Найдите выделившееся при этом количество теплоты.

10 класс

6. Две электрические лампочки, на которых указаны их мощности $P_1=100$ Вт и $P_2=150$ Вт, включены последовательно в сеть с постоянным напряжением, соответствующим номинальному напряжению лампочек. Какая мощность будет выделяться на обеих лампочках?

7. В плоском конденсаторе диэлектрик между пластинами промок и стал пропускать ток. В результате при плотности тока $j=0{,}02$ А/см^2 в единице объема диэлектрика ежесекундно стало выделяться количество теплоты $q=10^6$ Дж/м^3. Чему равна напряженность электрического поля в конденсаторе?

8. Батарея состоит из параллельно соединенных между собой одинаковых элементов с внутренним сопротивлением $r=1{,}4$ Ом и ЭДС $\mathscr{E}=3{,}5$ В каждый. При токе во внешней цепи $I=1$ А полезная мощность батареи равна $P=3{,}3$ Вт. Сколько элементов в батарее?

9. Электродвигатель трамвайного вагона работает при токе $I=100$ А и напряжении $U=500$ В. При силе тяги двигателя $F=4$ кН вагон имеет скорость $v=18$ км/ч. Чему равно сопротивление обмотки двигателя?

10. Сколько меди выделится на катоде за время $t=200$ с при электролизе сернокислой меди, если в течение первых 100 с сила тока равномерно возрастает от 0 до $I_1=6$ А, а в течение последующих 100 с она равномерно уменьшается до $I_2=2$ А? Электрохимический эквивалент меди $k=3{,}3\times\times10^{-7}$ кг/Кл.

11 класс

11. Чему равна скорость протона, если он в течение $t=1$ с разгоняется однородным электрическим полем напряженностью $E=10$ В/м? Каким был бы ответ в рамках классической (нерелятивистской) механики?

12. С поверхности Солнца ежесекундно излучается энергия $\Delta E=3{,}8\cdot10^{26}$ Дж. Масса Солнца $M=2{,}0\cdot10^{30}$ кг. Через сколько лет масса Солнца уменьшится на один процент?

13. Какова энергия атома водорода в возбужденном состоянии, в которое он переходит из основного состояния при поглощении фотона с энергией, равной 8/9 энергии ионизации атома водорода?

14. В реакции взаимодействия алюминия $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ с углеродом $^{12}_{6}\mathrm{C}$ образуется альфа-частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в этом ядре.

15. В цепочке радиоактивных превращений урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ в свинец $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ содержится несколько альфа- и бета-распадов. Сколько всего распадов в этой цепочке?

Публикацию подготовил А. Черноуцан

Почему нить все-таки будет двигаться?

(Начало см. на с. 5)

Такое решение задачи, казалось бы, не должно вызывать никаких сомнений. Однако предлагаем читателям еще раз внимательно посмотреть на рисунок (см. с. 5) и попытаться разобраться в следующем парадоксе.

Если нить действует на первое тело с силой $\vec{T}$, то, по третьему закону Ньютона, это тело действует на нить с силой $-\vec{T}$. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что и второе тело действует на нить с силой $-\vec{T}$. Но если перекинуть веревку через неподвижный блок и тянуть ее с двух сторон с одинаковыми силами, то веревка (а значит, и связанная с ней система грузов!) не должна двигаться с ускорением. Что же упущено в приведенном выше решении и почему нить все-таки будет двигаться?

Для ответа на этот вопрос попробуем чуть глубже вникнуть в физическую суть явления. Заметим, что любая реальная нить обладает массой и для того, чтобы нить двигалась с ускорением, силы, действующие на нее со стороны грузов, не должны быть одинаковыми. Обозначим массу нити через $m_н$, а силы натяжения нити слева и справа — через $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ соответственно. Теперь запишем уравнения движения для каждого груза и нити в проекциях на ось Y:

$$-m_1a=-m_1g+T_1,$$
$$m_2a=-m_2g+T_2,$$
$$m_нa=T_1-T_2.$$

Из этих уравнений легко получаем

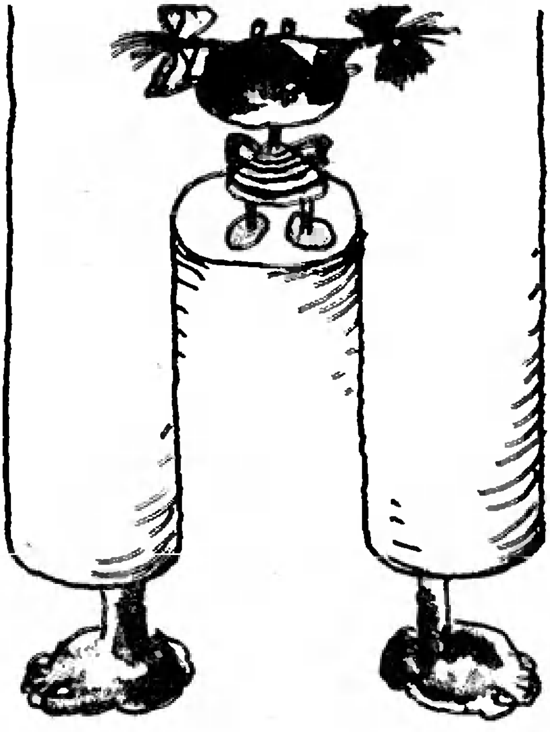
$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+m_н}g.$$

Так как масса нити, согласно условию задачи, мала по сравнению с массами грузов, величиной $m_н$ в знаменателе мы можем пренебречь. И тогда с большой точностью ускорение грузов оказывается равным

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g,$$

что полностью согласуется с первоначальным решением.

А. Свердлов



Математический кружок

Знаете ли вы, кто такой Реймонд М. Смаллиан? Американский профессор, специалист по математической логике, автор нескольких увлекательнейших популярных книжек, которые не менее занимательны, чем детективы, и столь же смешны, как шедевры Ильфа и Петрова.

Недавно мы перечитали одну из книг Смаллиана... Оставим пока трудный вопрос о ее названии,— легче объяснить, о чем она.

Вам не раз приходилось доказывать различные теоремы, леммы и следствия. Но задумывались ли вы, что означают слова: «утверждение доказано»? Вы скажете — доказано, если следует из некоторых правильных утверждений, которые, в свою очередь, вытекают из некоего набора принятых на веру аксиом. Хорошо, а что значит — «следует»?

Существуют определенные правила установления истинности высказывания на основе заведомо верных или заведомо ложных утверждений. Так, если верно, что все тигры полосаты и ваш зверь — тигр, вы можете заключить, что ваш зверь также полосат. Но, с другой стороны, если верно, что все тигры полосаты и ваш зверь тоже полосат, нельзя сделать вывод, что ваш зверь — тигр. Он может с тем же успехом быть зеброй, енотом или обыкновенным домашним котом...

С таких задачек, которые могут показаться забавными пустяками, начинается огромная наука — математическая логика, занятая глубинными проблемами оснований математики. В начале нашего столетия логики привели в замешательство весь математический мир: хорошенько покопавшись в основах, они обнаружили, что все многовековое здание математики стоит на песке!.. Чтобы спасти это чудо архитектуры, пришлось срочно подводить под него новый фундамент — иначе пришлось бы признать, что начиная с Евклида все математики занимались неизвестно чем... Оказалось, что такая привычная всем «математическая строгость» иллюзорна, ибо в любой аксиоматической системе есть истинные утверждения, которые невозможно доказать внутри этой системы, и есть ложные утверждения, которые невозможно опровергнуть,— и с этим приходится мириться. На этот счет существует теорема Гёделя о неполноте — сложная теорема, одна из вершин логической науки... И что же? Профессор Смаллиан (недаром он в начале своей ученой карьеры зарабатывал на пропитание, будучи фокусником на профессиональной эстраде!), вытаскивая из шляпы кролика за кроликом... простите, задачу за задачей, к концу своей книги приводит читателя к теореме Гёделя и вполне доступно объясняет, о чем она и как доказывается.

Мы настоятельно рекомендуем вам разыскать эту книгу*) (о ее названии — чуть ниже) и прочитать ее целиком, от начала до конца,— вы получите *истинное* удовольствие! А сейчас предлагаем вам одну главу из нее, снабдив небольшими комментариями (они даны мелким шрифтом). Каждая задача имеет подробное решение, но советуем вам заглядывать в него, лишь убедившись, что это вам действительно необходимо.

В заключение слово автору, профессору Смаллиану:

«И последнее, о чем я хочу сказать вам, пока не забыл. Как же называется эта книга? Эта книга так и называется — «Как же называется эта книга?»

Остров Ваал

Р. СМАЛЛИАН

Часть первая

В поисках абсолюта

В какой-то книге по философии мое внимание привлекли следующие строки: «Истинным философом с полным основанием можно назвать девочку лет девяти, которая долго смотрела в окно, а потом, обернувшись, спросила у матери:

*) М., Мир, 1981.

— Мамочка, отчего существует не́что, а не ничто́?»

Над решением этой великой проблемы ломали голову многие мудрецы. Некоторые из них придавали ей первостепенное значение и формулировали несколько иначе, чем их юная коллега: «Почему существует не́что, а не ничто́?»

Если задуматься, то вопрос этот действительно не так прост. Действительно, почему существует не́что, а не ничто́?

Давным-давно жил на свете один философ, который решил во что бы то ни стало выяснить, почему существует нечто, а не ничто. Он перечитал все книги по философии, которые когда-либо были написаны, но ни в одной из них не нашел убедительного ответа на мучивший его вопрос. Тогда он принялся за теологию. С кем он только ни беседовал: и со священнослужителями, и с учеными теологами, но никто из них не смог вразумительно объяснить, почему существует нечто, а не ничто. Разочаровавшись в мудрости Запада, наш философ с надеждой обратил свой взор на Восток. Около двенадцати лет провел он в странствиях по Индии и Тибету, беседовал со множеством гуру, но и те не знали, почему существует нечто, а не ничто. Нашему философу не оставалось ничего другого, как отправиться в Китай и в Японию и провести еще долгих двенадцать лет в попытках постичь мудрость Дао и дзен-буддизма. Наконец, после долгих и безуспешных поисков ему удалось набрести на одного дряхлого старца, возлежавшего на смертном одре, который перед самой кончиной сказал:

— Сын мой! Мне неведомо, почему существует нечто, а не ничто. Единственное место на свете, где знают ответ на твой несомненно важный вопрос — остров Ваал. Один из высших жрецов храма Ваала посвящен в эту великую тайну.

— А где находится остров Ваал? — спросил, сгорая от нетерпения, философ.

— Увы,— последовал ответ,— этого я тоже не знаю. Более того, за всю свою долгую жизнь я не встретил ни одного человека, который побывал бы на острове Ваал. Мне известно лишь то место в океане, где находится целый архипелаг островов, не отмеченный даже и в самой подробной лоции. На одном из этих островов хранится вычерченная кем-то от руки карта, на которой проложен курс к острову Ваал. К сожалению, не могу тебе сказать, на каком острове хранится карта. Знаю только, что называется тот остров Майя. Еще мне доподлинно известно, что архипелаг тот населен рыцарями, говорящими только правду, и лжецами, которые всегда лгут. Задавая вопрос жителям любого острова из числа входящих в архипелаг, следует держать ухо востро!

Таков был наиболее существенный результат более чем двадцатичетырехлетних непрестанных поисков! Но наш философ не впал в уныние. Пользуясь наставлениями мудрого старца, он добрался до архипелага, затерянного в бескрайних просторах океана, и принялся систематически обследовать остров за островом в надежде, что ему удастся найти остров Майя.

В следующих пяти задачах философу постоянно приходится решать проблему истинности или ложности высказываний вида «верно A и B». Обратите внимание на то, что подобное утверждение верно лишь тогда, когда одновременно истинны высказывания A и B. Если же хоть одно из них ложно, то ложно и все высказывание «верно A и B» (т. е. неверно, что A и B истинны).

Первый остров

На первом острове нашему философу повстречались два коренных жителя A и B, заявивших:

A: B — рыцарь, и этот остров называется Майя.

B: A — лжец, и этот остров называется Майя.

Можно ли утверждать, что первый остров действительно называется Майя?

Второй остров

Два коренных жителя A и B этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: Что правда, то правда.

Можно ли утверждать, что второй остров действительно называется Майя?

Начитавшись досыта Смаллиана, мы вдруг заметили небольшую оплошность, происшедшую, вероятно, при переводе условия этой задачи. Какую?

Пусть *B* сказал: «Все это правда». Можно ли в этом случае утверждать, что второй остров действительно называется Майя?

Третий остров

Коренные жители этого острова *A* и *B* заявили:

A: По крайней мере один из нас лжец, и этот остров называется Майя.

B: Совершенно верно!

Можно ли утверждать, что третий остров действительно называется Майя?

Четвертый остров

Два коренных жителя *A* и *B* этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: По крайней мере один из нас лжец, и этот остров не Майя.

Можно ли утверждать, что четвертый остров действительно называется Майя?

Пятый остров

Коренные жители *A* и *B* этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: По крайней мере один из нас рыцарь, и этот остров не Майя.

Можно ли утверждать, что пятый остров действительно называется Майя?

Шестой остров

Два обитателя *A* и *B* этого острова заявили:

A: Либо B — рыцарь, либо этот остров называется Майя.

B: Либо A — лжец, либо этот остров называется Майя.

Можно ли утверждать, что шестой остров действительно называется Майя?

На шестом острове аборигены задают философу задачку иного типа, чем раньше: теперь требуется сделать вывод об истинности или ложности высказывания вида «верно *A* или *B*». Заметьте, что такое утверждение верно, если истинно хотя бы одно из утверждений *A* и *B* (если *A* — истинно, *B* — ложно, то *A* или *B* истинно). Оно ложно лишь в том случае, когда неверны оба высказывания *A* и *B* одновременно.

Как добраться до острова Ваал?

Долго ли, коротко ли, но наш философ сумел-таки разыскать остров Майя. Впрочем, радость его была преждевременной: найти карту с прокладкой курса на остров Ваал оказалось не так просто, как он ожидал. Пришлось обратиться к верховному жрецу острова Майя. Выслушав философа, жрец ввел его в обширную комнату, посреди которой на столе были разложены три карты *X*, *Y* и *Z*. Жрец пояснил, что только одна карта позволяет найти остров Ваал, на двух остальных проложенные курсы ведут к островам демонов и что всякий, кто ступит на остров демонов, тотчас обращается в ничто. Философу предстояло выбрать одну из трех карт.

В комнате, куда жрец ввел философа, находились пятеро колдунов: *A*, *B*, *C*, *D* и *E*. Каждый из колдунов был либо рыцарем, либо лжецом, и каждый дал философу совет:

A: X — правильная карта.

B: Y — правильная карта.

C: Неверно, что A и B — оба лжецы.

D: Либо A — лжец, либо B — рыцарь.

E: Либо я лжец, либо C и D однотипны (т. е. либо оба рыцари, либо оба лжецы).

Какая из карт *X*, *Y* и *Z* правильная?

За эту многоходовую задачу лучше всего взяться с конца. Вы решили уже полдюжины логических задач и понимаете, какие неизбежные выводы следуют из заявления одного из аборигенов: «Я лжец...»

Решения

Первый остров

Предположим, что *B* — рыцарь. Тогда оба его утверждения истинны, т. е. *A* — лжец и первый остров называется Майя. Но тогда *A* высказал истинное утверждение, и, следовательно, *A* — рыцарь; но он одновременно и лжец, что невозможно. Следовательно, *B* — лжец.

Поскольку *B* лжец, то одно из его

утверждений ложно. Предположим, он солгал в том, что A является лжецом, т. е. A — рыцарь. Но в этом случае верно заявление A о том, что B — рыцарь, что невозможно.

Итак, A и B оба лжецы, и первое из утверждений B истинно; значит, ложно второе из них. Таким образом, первый остров — не Майя.

Второй остров

Помните замечание об оплошности, возникшей при переводе? Если B говорит: «Что правда, то правда»,— тем самым он изрекает абсолютную истину! Ведь то, что истинно — истинно, не так ли? Но в этом случае B — заведомый рыцарь. Что касается A, он заведомый лжец, ибо рыцарь не мог бы сказать: «мы оба лжецы». Но поскольку A — лжец, а B — рыцарь, первое утверждение A ложно, и все его высказывание оказывается ложным независимо от того, называется ли второй остров Майя или нет. Итак, в такой постановке задачи нельзя утверждать, что второй остров — Майя, но нельзя утверждать и обратное.

Если же B говорит: «Все это правда», т. е. соглашается с A, то он такой же лжец, как и A. В таком случае первое из утверждений A истинно, следовательно, ложно второе. Поэтому второй остров — не Майя.

(Несомненно, Смаллиан имел в виду второй вариант задачи. Неприятность получилась потому, что в обыденной речи мы воспринимаем слова «что правда, то правда» как подтверждение сказанному. Таким образом, американский профессор невольно заставил нас вдуматься в привычный оборот русского языка и обнаружить, что он означает совсем не то, что мы предполагали!)

Третий остров

Предположим, что A — рыцарь. Так как B согласен с ним, то он также рыцарь. Но тогда неверно утверждение A о том, что по крайней мере один из них лжец. Следовательно, A — лжец.

Поскольку A — лжец, то первое из его заявлений — правда. Поэтому второе утверждение A — ложь (иначе бы все его высказывание оказалось истинным), и третий остров — не Майя.

Четвертый остров

Так как A сказал: «Мы оба лжецы», то он лжец (с этой ситуацией мы уже сталкивались на втором острове). Предположим, что B — тоже лжец. В этом случае первое высказывание A и первое высказывание B истинны, следовательно, должны быть ложными оба вторых утверждения. Это значит, что остров одновременно Майя и не Майя, чего быть не может. Поэтому B — рыцарь, и оба его заявления верны, т. е. и четвертый остров — не Майя.

Пятый остров

Как и в предыдущей задаче, островитянин A — заведомо лжец. Если B — рыцарь, то этот остров не Майя. Если же B — лжец, то первое из утверждений A истинно, значит, второе ложно, и этот остров опять-таки не Майя.

Шестой остров

Допустим, что A — лжец. Тогда оба его утверждения — вранье, т. е. B — лжец и этот остров — не Майя. Но поскольку B заявляет, что A — лжец, первое из его утверждений истинно, тогда правдиво и все высказывание B. Но B не может быть одновременно лжецом и не лжецом. Поэтому A — рыцарь.

Тогда верно одно из высказываний A. Если верно второе из них, то этот остров Майя. Если верно первое, то B — рыцарь и хотя бы одно из его высказываний правдиво. Поскольку B заявляет, что A — лжец, а это не так, то истинно второе из высказываний B, и этот остров — Майя.

Итак, остров Майя после долгих поисков наконец найден!

Как добраться до острова Ваал?

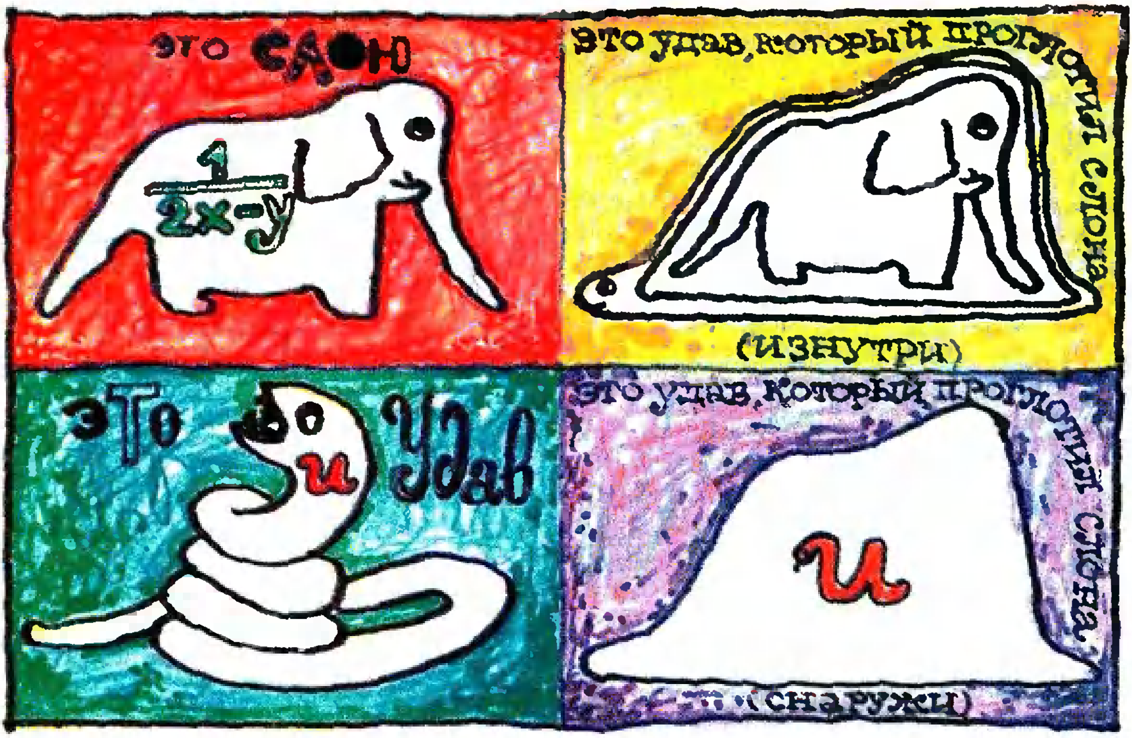
Колдун E говорит: «Либо я лжец, либо C и D однотипны». Если E — лжец, то первое из его утверждений истинно, значит, истинно и все высказывание. Но лжецы правды не говорят. Итак, E — рыцарь; поскольку в этом случае первое из его высказываний ложно, то второе — истинно, и C и D одновременно либо оба рыцари, либо оба лжецы.

Допустим, что C и D — лжецы. Тогда A и B оба лжецы, поскольку C утверждает обратное. Но в таком случае D говорит правду, так как A — действительно лжец; значит, D — рыцарь, что невозможно.

Выходит, C и D — рыцари. Тогда, во-первых, хотя бы один из колдунов A и B — рыцарь и, во-вторых, либо A — лжец, либо B — рыцарь. Если бы второе из утверждений D было ложным, то было бы правдой первое; но в таком случае A и B оба оказались бы лжецами в противоречие словам рацаря C. Таким образом, B — рыцарь, и Y — правильная карта.

(Окончание следует)

Перевод с английского Ю. Данилова



Практикум абитуриента

Решаем системы уравнений

Кандидат педагогических наук
В. ЗАТАКАВАЙ

В этой статье мы постараемся помочь школьникам сориентироваться в многообразии систем уравнений, встречающихся в практике приемных экзаменов, и дать советы по их решению.

При решении системы главное — суметь свести ее к такой, которую наверняка удастся решить. При этом часто помогают некоторые стандартные приемы, облегчающие решение. Самый распространенный из них — замена переменных*).

Пример 1.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

*)Здесь мы будем опускать рассуждения о равносильности преобразований и переходов, подразумевая, что они выполняются.

При помощи замены $\frac{1}{2x-y}=u$, $\frac{1}{x-2y}=v$ данная система сводится к линейной:

$$\begin{cases} 2u+3v=\dfrac{1}{2}, \\ 2u-v=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Решив ее, получим

$$u=\frac{1}{12}, \quad v=\frac{1}{9}.$$

Возвращаясь к старым переменным и выполняя очевидные преобразования, придем к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=12, \\ x-2y=9. \end{cases}$$

Ее решение не должно вызывать затруднений.

Ответ: (5; —2).

Пример 2.

$$\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$$

Очевидно, что каждое из уравнений системы является квадратным: первое — относительно $(x+y)$, второе — относительно $(x-y)$. В данном случае на этом и основана замена переменных: $x+y=u$, $x-y=v$. Решая квадратные уравнения относительно u и v, получаем $u_1=-5$, $u_2=9$ и $v_1=-1$, $v_2=3$.

Теперь исходная система распадается на четыре линейные:

$$\begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=9, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9, \\ x-y=3. \end{cases}$$

Дальнейшее решение осуществляется практически устно.

Ответ: $(-3;\ -2)$; $(-1;\ -4)$; $(4;\ 5)$; $(6;\ 3)$.

Искусство производить замену переменных заключается в том, чтобы увидеть, какая замена будет более рациональна и быстрее приведет к успеху. При этом рекомендуем придерживаться следующих правил: замену производить сразу, как появляется такая возможность; возвращаться к старым переменным только после проведения всех преобразований с новыми (т. е. после получения окончательного результата относительно новых переменных).

В примерах 1 и 2 замена была очевидной, она как бы напрашивалась сама собой. Столь же очевидна замена и в системах, когда одно из уравнений (или несколько) являются алгебраической суммой взаимообратных выражений.

Пример 3

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=12. \end{cases}$$

Здесь удобно рассмотреть первое уравнение системы и сделать замену $\dfrac{x+y}{x-y}=z$. Уравнение примет вид

$$z+\frac{1}{z}=\frac{10}{3},$$

откуда $z_1=3$, $z_2=\dfrac{1}{3}$.

Теперь система распадается на следующие две:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=3, \\ x^2-y^2=12 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{3}, \\ x^2-y^2=12, \end{cases}$$

которые уже легко решить.

Ответ: $(-4;\ -2)$; $(-4;\ 2)$; $(4;\ -2)$; $(4;\ 2)$.

Однако во многих случаях удобная замена далеко не очевидна. Большую группу таких систем (часто встречающихся на приемных экзаменах) составляют так называемые *симметричные* (или *симметрические*) системы.

Напомним, что симметричными называются системы, если замена x на y, а y на x не меняет каждого из ее уравнений.

Для решения симметричных систем существует стандартная замена:

$$x+y=u,\quad xy=v.$$

Пример 4.

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$$

Пусть $x+y=u$, $xy=v$. Чтобы выразить x^2+y^2 через новые переменные, надо $x+y=u$ возвести в квадрат. Имеем $x^2+2xy+y^2=u^2$, откуда $x^2+y^2=u^2-2v$.

Получаем систему

$$\begin{cases} u^2-2v^2-u=102, \\ u+v=69. \end{cases}$$

Ее решение очевидно. Получаем

$$\begin{cases} u=15, \\ v=54 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u=-16, \\ v=85. \end{cases}$$

Последняя пара чисел при возврате к старым переменным не приводит к действительному решению.

Ответ: $(6;\ 9)$; $(9;\ 6)$.

Есть еще одна распространенная группа систем уравнений, для решения которых требуется стандартный прием. Это системы вида

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2. \end{cases}$$

Многочлены второй степени в левых частях обоих уравнений *однородны*, т. е. содержат слагаемые лишь второй степени по x и y. Способ решения таких систем основан на сведении системы к уравнению с нулевой правой частью (его также называют однородным).

Пример 5.

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и вычтя второе уравнение из первого, получим однородное уравнение второй степени

$$3x^2-8xy+4y^2=0.$$

Разделив последнее на $y^2\neq 0$ (в том, что $y=0$ не является решением данной системы, легко убедиться самостоятельно), приходим к квадратному уравнению относительно $z=x/y$:

$$3z^2-8z+4=0,$$

откуда $z_1=\frac{2}{3}$, $z_2=2$.

Теперь нетрудно довести решение данной системы до конца.

Ответ: $(-2;\ -1)$; $(2;\ 1)$.

Как мы уже говорили, введение новых переменных — весьма распространенный прием. Однако умение свободно пользоваться им достигается не сразу и приходит с опытом. Часто замена переменных приводит к кажущемуся усложнению задачи, в частности к увеличению числа уравнений и неизвестных. В таких ситуациях теряться не следует, надо все же попробовать довести решение до конца.

Пример 6.

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5, \\ \sqrt{2x+y}+x-y=1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\sqrt{7x+y}=u,$$
$$\sqrt{2x+y}=v,$$
$$x-y=w,$$

тогда $u^2=7x+y$, $v^2=2x+y$.

Таким образом, для u, v и w получаем систему

$$\begin{cases} u+v=5, \\ v+w=1, \\ 3u^2-8v^2-5w=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы получено из следующих соображений: так как

$$\begin{cases} u^2=7x+y, \\ v^2=2x+y; \\ w=x-y, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} u^2+w=8x, \\ v^2+w=3x. \end{cases}$$

Исключим x из этой системы:

$$3u^2-8v^2-5w=0.$$

Несмотря на то что у нас получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными, решить ее значительно проще, чем исходную.

Из первого и второго уравнений выразим u и w через v и подставим в третье. Имеем

$$u=5-v,$$
$$w=1-v,$$

откуда

$$3(5-v)^2-8v^2-5(1-v)=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни 2 и -7; $v=-7$ не подходит, так как по обозначению $v\geqslant 0$. Значит, $v=2$, тогда $u=3$, $w=-1$, откуда $x=1$, $y=2$.

Ответ: $(1;\ 2)$.

Еще один весьма популярный способ решения систем — последовательное исключение неизвестных (или группы неизвестных). Это позволяет свести данную систему уравнений к системе с меньшим числом неизвестных (или к более простому уравнению, например квадратному, относительно группы неизвестных).

Пример 7.

$$\begin{cases} 3x^2y^2+x^2-3xy-7=0, \\ 10x^2y^2+3x^2-20xy-3=0. \end{cases}$$

Исключив из системы x^2 (для чего первое уравнение умножим на 3 и вычтем из второго), мы получим квадратное уравнение относительно произведения xy:

$$(xy)^2-11xy-18=0.$$

Его корнями являются числа 9 и 2.

В результате система распадается на две:

$$\begin{cases} xy=9, \\ 3x^2y^2+x^2-3xy-7=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} xy=2, \\ 3x^2y^2+x^2-3xy-7=0. \end{cases}$$

Первая из них оказывается несовместной, вторая — приводит к уравнению $x^2=1$.

Ответ: $(-1;\ -2)$; $(1;\ 2)$.

На примере решения этой системы мы лишь продемонстрировали прием исключения неизвестных. Справедливости ради надо сказать, что внимательный читатель и в этой системе увидит очевидную замену: $xy=u$, $x^2=v$, ну а каким способом решать — дело вкуса.

Пример 8.

$$\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^2}{x}. \end{cases}$$

Естественное желание — исключить из системы группу xy — только усложнит решение. Здесь лучше почленно перемножить уравнения. Тогда получим, что $xy=8$, и система примет вид

$$\begin{cases} xy=8, \\ \dfrac{y^3}{x}=2. \end{cases}$$

Ответ: $(-4;\ -2)$; $(4;\ 2)$.

Часто бывает целесообразно способ последовательного исключения неизвестных применить в ином, так сказать, «школьном» виде: какое-либо неизвестное из одного уравнения выразить через остальные неизвестные и подставить в другие уравнения системы.*)

*) Термин «школьный» здесь употреблен в том смысле, что в школьной математике эта разновидность способа последовательного исключения переменных рассматривается как самостоятельный метод решения системы — способ подстановки.

Пример 9.

$$\begin{cases} 4x^2+4x-y^2=-1, \\ 4x^2-3xy+y^2=1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$y^2=4x^2+4x+1,$$

т. е. $y^2=(2x+1)^2$, откуда

$$y=2x+1 \text{ или } y=-2x-1.$$

Дальнейшее решение очевидно.

Ответ: $(-0{,}5;\ 0)$; $(0;\ -1)$; $(0;\ 1)$.

Пример 10.

$$\begin{cases} y^4+19=x+y, \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Кажется, уж здесь-то никак нельзя воспользоваться обсуждаемым приемом, однако, возведя второе уравнение дважды в квадрат, мы получим $x=\dfrac{(1-y)^2}{2}$. Теперь возвратимся к первому уравнению. Имеем

$$y^4-10y^2+9=0.$$

Числа ±1, ±3 являются корнями полученного биквадратного уравнения, но корни ±3 не удовлетворяют начальному условию.

Ответ: $(0;\ 1)$; $(2;\ -1)$.

При решении системы уравнений нельзя забывать и о всевозможных алгебраических приемах, позволяющих при помощи тех или иных преобразований (группировка, вынесение общего множителя за скобки, применения формул сокращенного умножения и т. д.) упростить как саму данную систему, так и непосредственно процесс решения.

Так, в примерах 9 и 10 нам пришли на помощь формулы сокращенного умножения. Что же касается примера 9, то в его решении можно использовать и другой прием: сложив оба уравнения, получим

$$8x^2+4x-3xy=0.$$

Теперь вынесем общий множитель за скобки:

$$x(8x+4-3y)=0.$$

В результате система распадается на две:

$$\begin{cases} x=0, \\ 4x^2+4x-y^2=-1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y=\frac{8x+4}{3}, \\ 4x^2+4x-y^2=-1. \end{cases}$$

Решить их нетрудно, ну а выбор способа решения системы 9 зависит от читателя.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 11.

$$\begin{cases} y^4+xy^2-2x^2=0, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Очевидная подстановка (выражаем какую-либо переменную из второго уравнения и подставляем в первое) не приводит к хорошему результату, так как получается уравнение четвертой степени, успешное решение которого весьма проблематично.

Преобразуем первое уравнение:

$$(y^2-x)(y^2+2x)=0.$$

Тогда данная система распадается на две:

$$\begin{cases} y^2-x=0, \\ x+y=6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2+2x=0, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Вторая система решения не имеет.

Складывая оба уравнения первой, получаем квадратное уравнение

$$y^2+y-6=0.$$

Ответ: (4; 2); (9; —3).

Пример 12.

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

Решение этой системы требует мастерства и интуиции. Умножим второе уравнение на —2 и сложим с первым. Получаем

$$4x^2+9y^2-12xy-4x+6y+1=0,$$

или

$$(2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0.$$

Теперь и здесь легко увидеть полный квадрат разности. Имеем

$$(2x-3y-1)^2=0.$$

Система получается хотя и громоздкой, но простой по способу решения:

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 2x-3y-1=0. \end{cases}$$

Мы видим, что действительно потребовались «мастерство и интуиция»: нелегко догадаться, как преобразовать уравнения, чтобы произошло очевидное упрощение. Однако и для решения подобных систем существует стандартный прием: надо рассмотреть какое-либо из уравнений как квадратное относительно одного неизвестного. В данном случае рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно x. Имеем

$$10x^2-2(y+19)x+5y^2-6y+41=0.$$

Вычислим его дискриминант:

$$\frac{D}{4}=-49(y-1)^2.$$

Квадратное уравнение имеет действительные корни при $D\geqslant 0$, значит, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $-49(y-1)^2\geqslant 0$, что возможно лишь при $y=1$. Подставив теперь это значение y в любое из данных уравнений, получим $x=2$.

Ответ: (2; 1).

Теперь применим этот способ в другой ситуации.

Пример 13.

$$\begin{cases} x^2-6y^2-xy-2x+11y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x:

$$x^2-(y+2)x-6y^2+11y-3=0.$$

В этом случае $D=(5y-4)^2$, значит, $x_1=3y-1$, $x_2=3-2y$.

Система распадается на две:

$$\begin{cases} x=3y-1, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3-2y, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Ответ: (—2,2; —0,4); (—1; 2); (2; 1); (2,2; 0,4).

Мы постарались дать читателю широкий спектр приемов и методов решения всевозможных алгебраических систем. Правда, мы не касались таких систем уравнений, как тригонометрические, показательные и логарифмические, но принципы их решения остаются теми же, добавляется лишь специфика соответствующих функций.

Несмотря на то что ряд систем решается стандартными методами, бо́льшая часть их требует индивидуального подхода. Но даже в стандартных ситуациях надо думать и искать оптимальный путь решения.

Пример 14.

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$$

Система симметричная, и, конечно, ее можно решать при помощи стандартной замены. Однако замена $x\sqrt{y}=u$, $y\sqrt{x}=v$ позволяет прийти к верному результату значительно быстрее.

Ответ: (1; 4); (4; 1).

Пример 15.

$$\begin{cases} x^2-5xy+3y^2=17, \\ 2x^2-7xy+4y^2=26. \end{cases}$$

Система стандартная — она приводится к однородному уравнению (сравните с примером 5). Однако здесь легко увидеть, что если из второго уравнения вычесть первое, то мы получим полный квадрат разности:

$$x^2-2xy+y^2=9,$$

откуда

$$x-y=3 \text{ или } x-y=-3.$$

Доведите решение этой системы до конца самостоятельно.

Ответ: (—5; —8); (—2; 1); (2; —1); (5; 8).

В заключение хотелось бы дать один совет.

В решении систем, как в спорте, мастерство достигается упражнениями. Поэтому — решайте! Чем больше, тем лучше.

Задачи для самостоятельного решения

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x^2+y-z=-1, \\ 2x-y-z=-1, \\ x^4-y+zy=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}, \\ xy-x-y=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12, \\ x+y+\sqrt{xy}=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y=-1, \\ y-z=-1, \\ (x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7, \\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ 3x^2+2xy-2y^2=3; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y), \\ x^2-y^2=41; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ x+y+z+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$

Мешок

(фантастический рассказ)

У. МОРРИСОН

Зиблинг ожидал своего первого часового интервью с Мешком не без некоторого трепета. До сих пор его обязанности были ограничены несложными задачами, установленными в инструкции: присмотр за противометеоритным куполом-укрытием, обеспечение необходимых запасов пищи, а также забота о воинском подразделении и гвардейцах межпланетного флота. Ибо к тому времени огромная ценность Мешка уже была признана во всей солнечной системе, и каждому было ясно, что тысячи преступников попытаются выкрасть это беззащитное сокровище.

А теперь, думал Зиблинг, я должен буду разговаривать с ним. Он боялся потерять то доброе мнение, которое Мешок почему-то составил о нем. Он находился в положении, до странности напоминающем положение молоденькой девицы, которой хотелось бы больше всего болтать о нарядах и мальчиках с кем-нибудь, кто находится на ее уровне, и которая вынуждена вести блестящую и глубокомысленную беседу с человеком втрое старше ее.

Но при виде Мешка его благоговейный страх до некоторой степени испарился. Было бы абсурдом утверждать, что его успокоили манеры этого странного существа. Оно было лишено каких-либо манер, и даже когда часть его приходила в движение — обычно во время разговора,— это движение казалось совершенно безличным. И тем не менее что-то в Мешке смягчило страхи Зиблинга.

Некоторое время он стоял перед Мешком молча. Потом, к его изумлению, Мешок заговорил — впервые заговорил сам, не ожидая вопроса.

Продолжение. См. «Квант» № 2.

— Вы не разочаруете меня,— сказал он,— я ничего не жду.

Зиблинг улыбнулся. Мешок никогда еще не говорил так. Впервые он показался Зиблингу не столько механическим мозгом, сколько живым существом. Зиблинг спросил:

— Кто-нибудь спрашивал раньше о вас самих?

— Один человек. Это было еще до того, как мое время распределили по минутам. И даже этот человек прекратил свои расспросы, когда сообразил, что ему лучше попросить совета, как стать богатым. Он почти не обратил внимания на мой ответ.

— Сколько вам лет?

— Четыреста тысяч. Я могу указать свой возраст с точностью до долей секунды, но полагаю, что точные цифры интересуют вас меньше, чем моих обычных собеседников.

Мешок по-своему не лишен чувства юмора, подумал Зиблинг и спросил:

— И сколько лет вы провели в одиночестве?

— Более десяти тысяч лет.

— Однажды вы сказали кому-то, что ваши товарищи были убиты метеоритами. Вы не могли оградить себя от этой опасности?

Мешок проговорил медленно, почти устало:

— Это случилось уже после того, как мы потеряли интерес к жизни. Первый из нас умер триста тысяч лет назад.

— И с тех пор вы жили без желания жить?

— У меня нет и желания умереть. Жизнь стала привычкой.

— Почему вы потеряли интерес к жизни?

— Потому что мы потеряли будущее. Мы просчитались.

— Вы способны делать ошибки?

— Мы не утратили эту способность. Мы просчитались, и хотя те из нас, кто жил тогда, избежали гибели, нашему следующему поколению не повезло. После этого нам стало не для чего жить.

Зиблинг кивнул. Эту потерю интереса к жизни человек способен понять. Он спросил:

— Разве вы с вашими знаниями не могли устранить последствий своего просчета?

Мешок ответил:

— Чем больше вещей становятся для вас возможными, тем отчетливее вы осознаете, что ничего нельзя сделать, минуя законы природы. Мы не всесильны. Иногда кто-нибудь из особо глупых клиентов задает мне вопросы, на которые я не могу ответить, а потом сердится, потому что чувствует, что заплатил деньги напрасно. Другие просят меня предсказать будущее. Я могу предсказать только то, что могу рассчитать, но способность моя к расчетам тоже ограничена, и хотя мои возможности по сравнению с вашими огромны, они не позволяют предусмотреть всего.

— Как это случилось, что вы знаете так много? Знание рождается в вас?

— Рождается только возможность познания. Чтобы знать, мы должны учиться. Это мое несчастье, что я так мало забыл.

— Какие способности вашего организма или какие органы мышления позволяют вам так много знать?

Мешок заговорил, но слова его были непонятны Зиблингу, и тот признался в этом.

— Я мог бы сказать вам сразу, что вы не поймете,— промолвил Мешок,— но хотел, чтобы вы осознали это сами. Чтобы разъяснить все это, мне пришлось бы продиктовать вам с десяток томов, и тома эти вряд ли были бы поняты даже вашими специалистами по биологии, физике и тем наукам, которые вы еще только начинаете изучать.

Зиблинг не отвечал, и Мешок проговорил словно в раздумье:

— Ваша раса все еще не разумна. Уже много месяцев я в ваших руках, но ни один из вас еще не задавал мне важных вопросов. Те, кто желает разбогатеть, расспрашивают о минералах и о концессиях на участки, спрашивают, какой из их планов сколотить состояние будет наилучшим. Некоторые врачи спрашивали меня, как лечить смертельно больных богатых пациентов. Ваши ученые просят меня разрешить проблемы, на которые они без моей помощи затратили бы годы. А когда задают вопросы ваши правители, они оказываются самыми глупыми из всех, ибо хотят знать только одно: как удержаться у власти. Никто не спрашивает того, что надо.

— О судьбе человечества?

— Это предсказание отдаленного будущего. Это вне моих возможностей.

— Что же мы должны спрашивать?

— Вот вопрос, которого я ожидал. Вам трудно понять его важность, потому что каждый из вас занят только самим собой.

Мешок замолк, затем пробормотал:

— Я болтаю непозволительный вздор, когда разговариваю с этими тупицами. Но даже вздор может считаться информацией. Другие не понимают, что в больших делах прямота опасна. Они задают мне вопросы, требующие специальных ответов, а им следовало бы спросить о чем-нибудь общем.

— Вы не ответили мне.

— Это часть ответа — сказать, что вопрос важен. Ваши правители видят во мне ценную собственность. Им следовало бы спросить, так ли велика моя ценность, как это кажется. Им следовало бы спросить, что приносят мои ответы — пользу или вред.

— А что они приносят?

— Вред, огромный вред.

Зиблинг был поражен. Он сказал:

— Но если ваши ответы правдивы...

— Процесс достижения истины так же драгоценен, как и сама истина. Я лишил вас этого. Я даю вашим ученым истину, но не всю, ибо они не знают, как достигнуть ее без моей помощи. Было бы лучше, если б они познавали ее ценой многих ошибок.

— Я не согласен с вами.

— Ученый спрашивает меня, что происходит в живой клетке, и я говорю ему. Но если бы он исследовал клетку самостоятельно — пусть ценою затраты многих лет, он пришел бы к финишу не только с этим знанием, но и множеством других, со знанием вещей, о которых он сейчас даже не подозревает, а они тесно связаны с его наукой. Он получил бы много новых методов исследования.

— Но ведь в некоторых случаях знание полезно само по себе. Например, я слышал, что уже используется предложенный вами дешевый процесс производства урана на Марсе. Что в этом вредного?

— А вам известно, сколько имеется необходимого сырья? Ваши ученые не продумали этого вопроса, они растранжирят все сырье и слишком поздно поймут, что они наделали. У вас ведь уже было так на Земле. Вы узнали, каким образом можно дешево перерабатывать воду; вы тратили воду безрассудно, и вскоре вам перестало ее хватать.

— Что плохого в том, чтобы спасти жизнь умирающего пациента, как это делали некоторые врачи?

— Первый вопрос, который следовало бы задать, это — стоит ли спасать жизнь такого пациента.

— Но именно этого доктор не должен спрашивать. Он должен стараться спасти всех умирающих. Совершенно так же, как вы никогда не спрашиваете, в добро или зло обратят люди ваши знания. Вы просто отвечаете на их вопросы.

— Я отвечаю только потому, что мне все равно, меня не интересует, как они используют то, что я скажу. Разве докторам тоже все равно?

Зиблинг сказал:

— Подразумевается, что вы отвечаете на вопросы, а не задаете их. Кстати, почему вы вообще отвечаете?

— Некоторые представители человечества любят хвастаться, другие — делать так называемое добро, третьи — добывать деньги. То небольшое удовольствие, какое я могу еще получать от жизни, состоит в том, чтобы давать информацию.

— А вы не могли бы находить удовольствие во лжи?

— Я так же не способен лгать, как ваши птицы не способны покинуть Землю на собственных крыльях.

— Еще один вопрос. Почему вы потребовали, чтобы во время отдыха разговаривал с вами именно я? У нас есть блестящие ученые, великие люди всех сортов, из которых вы могли бы выбирать.

— Меня не интересуют великие представители вашей расы. Я избрал вас, потому что вы честны.

— Спасибо, но на Земле много других честных людей. И на Марсе и на других планетах. Почему я, а не они?

Мешок, казалось, колебался:

— Это доставило мне маленькое удовольствие. Возможно, потому, что я знал: мой выбор будет неприятен тем... семерым...

Зиблинг улыбнулся.

— Вы не так уж равнодушны, как вам кажется. Полагаю, очень трудно быть равнодушным к сенатору Хорригану.

Это был только первый из многих разговоров с Мешком. Сначала Зиблинга весьма обеспокоило предупреждение Мешка относительно опасности, грозящей человечеству, если его (Мешка) советами будут и впредь столь безрассудно пользоваться. Но было бы нелепостью стараться убедить правительственные органы, что Мешок, приносящий ежедневно многие миллионы, является бедствием, а не благословением человеческого рода, и Зиблинг даже не пытался этого сделать. Через некоторое время он постарался загнать все эти неприятные мысли как можно глубже.

Поскольку разговоры велись через каждые двадцать часов, Зиблингу пришлось реорганизовать свое расписание, что было не так уж просто для человека, привыкшего к суткам межпланетным, тридцатичасовым. Но он чувствовал себя с лихвой вознагражденным за это беспокойство регулярными беседами с Мешком. Он узнал множество нового о планетах, солнечной системе, галактиках, но все эти сведения получал случайно, не задавая специальных вопросов. Поскольку его познания в астрономии ограничивались школьным курсом, ему никогда и в голову не приходило, что существует целый ряд вопросов, которые следовало бы задать — главным образом относительно других галактик.

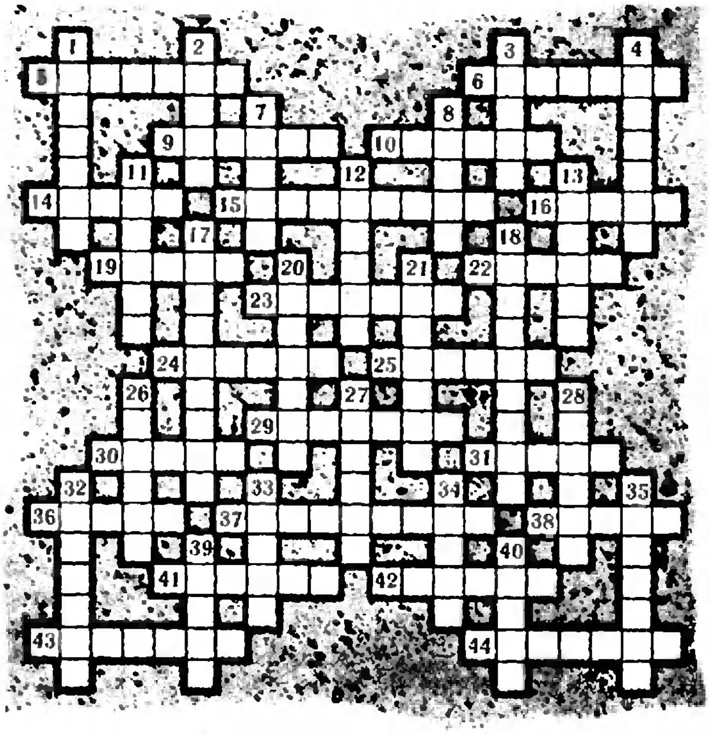
Впрочем, вероятно, ничего бы не изменилось, если бы он и задал эти вопросы, ибо некоторые ответы понять было слишком трудно. Он потратил три беседы подряд, стараясь уяснить, каким образом Мешок смог без всякого предварительного контакта с людьми понять земной язык капитана Ганко в тот исторический час, когда этот сверхразум впервые открыл себя людям, и как он смог ответить словами, практически лишенными всякого акцента. Но даже после трех бесед у Зиблинга осталось лишь весьма смутное представление о том, как это делалось.

Это не было телепатией, как он думал вначале. Это был чрезвычайно запутанный аналитический процесс, учитывающий не только слова, которые произносились, но и природу межпланетного корабля, скафандров, которые носили люди, манеру их разговора и множество других факторов, характеризующих как психологию говорящего, так и его язык. Это было похоже на рассуждения математика, старающегося объяснить человеку, не знающему даже арифметики, как он определяет уравнение сложной кривой по ее короткой дуге. Только Мешок не в пример математику мог проделать все это в собственной, так сказать, голове без помощи бумаги и карандаша.

(Окончание следует)

Перевод с английского С. Бережкова

Кроссворд



По горизонтали:

5. Итальянский астроном. **6.** Английский астроном, открывший планету Уран. **9.** Звезда в созвездии Большой Медведицы. **10.** Рассеянное звездное скопление в созвездии Тельца. **14.** Летчик-космонавт СССР. **15.** Фаза Луны. **16.** Нижняя точка пересечения отвесной линии с небесной сферой. **19.** Малая планета. **22.** Планета Солнечной системы. **23.** Зодиакальное созвездие. **24.** Серия советских космических кораблей. **25.** Ученый, открывший законы движения планет. **29.** Созвездие Севериого полушария. **30.** Звездное скопление в созвездии Тельца. **31.** Яркий метеор. **36.** Двойная звезда в созвездии Большой Медведицы. **37.** Созвездие южного неба. **38.** Промежуток времени, через который в одной и той же последовательности повторяются солнечные и лунные затмения. **41.** Переменная звезда в созвездии Персея. **42.** Серия американских межпланетных станций. **43.** Главная звезда в созвездии Малого Пса. **44.** Самоходный космический аппарат.

По вертикали:

1. Первый космонавт Земли. **2.** Главная звезда в созвездии Лебедя. **3.** Звезда в созвездии Большой Медведицы. **4.** Главная звезда в созвездии Орла. **7.** Экваториальное созвездие, одно из самых красивых на небе. **8.** Верхняя точка пересечения отвесной линии с небесной сферой. **11.** Серия советских спутников связи. **12.** Планета Солнечной системы. **13.** Английский астроном, именем которого названа знаменитая комета. **17.** Созвездие Северного полушария. **18.** Тип телескопа. **20.** Советский ученый и конструктор в области ракетостроения, академик. **21.** Лунный кратер. **26.** Созвездие Южного полушария. **27.** Английский ученый, открывший закон всемирного тяготения. **28.** Команда космического корабля. **32.** Древнегреческий астроном. **33.** Оборот космического корабля вокруг Земли. **34.** Спутник Марса. **35.** Летчик-космонавт СССР. **39.** Звезда в созвездии Большой Медведицы. **40.** Главная звезда в созвездии Льва.

Н. Мунасылов

(Ответы см. на с. 70)

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

*(механико-математический и экономический факультеты)**

1. Возвращаясь с рыбалки, Вася отдал Пете несколько рыб, чтобы уравнять улов. Если бы Петя отдал Васе столько же рыб, то у Васи оказалось бы в пять раз больше рыб, чем у Пети. Во сколько раз Васин улов больше Петиного?

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB=10$, $AC=8$, $BC=6$ проведена медиана CM. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CM, BC в точках P, Q, R соответственно. Найдите наименьшее возможное значение суммы площадей треугольника PMQ и CQR.

3. Решите неравенство

$$\log_{2-\sqrt{3}}((x-11)(x^2-4x-5))\geqslant$$
$$\geqslant(\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1))\log_{\sqrt{2}-1}(x-11)^2.$$

4. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_{a-2}\left(\frac{17}{8}+\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)=3$$

имеет решения.

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найдите объем призмы, если известно, что прямые AB' и CA' перпендикулярны.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Какой наименьший угол могут образовать векторы $(1-5x;\ 1;\ 3)$, $(-1;1+4x;\ 3-3x)$?

2. Решите уравнение

$$2\cos\left(\frac{5\pi}{3}-4\sin x\right)=1.$$

3. Окружность, проходящая через вершину C треугольника ABC, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найдите AC и BC, если известно, что $AP=3$, $AL=6$, $LB=8$ и прямая PQ параллельна AB.

4. Решите уравнение

$$2\cdot 4^{|x+2|}+3\cdot 9^{|x+2|}=7\ \ 6^{|x+2|}.$$

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' все ребра равны 6. Точки P и Q' расположены на ребрах BC и $A'C'$ соответственно и так, что $BP:PC=A'Q':Q'C'=1:2$. Найдите радиус сферы с центром на отрезке PQ', которая касается плоскостей $ABB'A'$ и $ACC'A'$.

*) Задачи 1, 3, 5 предлагались также на факультете естественных наук и на геолого-геофизическом факультете.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов.

После текста каждой задачи в скобках указан процент решивших ее.

Вариант 1

1. Две открытые с обоих концов трубы сечениями S_1 и S_2 состыкованы между собой (рис. 1). В них вставлены соединенные стержнем поршни, которые при комнатной температуре T_0 в положении равновесия находятся на одинаковом расстоянии от стыка труб. До какой величины надо понизить температуру воздуха между поршнями, чтобы правый поршень

сместился влево до упора? Трением поршней о трубы пренебречь. (68 %).

2. Шарики массами m и M соединены легкой недеформированной пружиной. Шарику массой m сообщили скорость $\vec{v}$ в направлении второго шарика. В момент максимального растяжения пружина порвалась. Какое количество теплоты выделилось к этому моменту? (44 %).

3. Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы, емкости которых C_1 и C_2 (рис. 2). Проводящая перемычка массой m касается шин, расстояние между которыми l, и может без трения скользить вдоль них. Перпендикулярно плоскости шин включается однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Какую силу F вдоль шин надо приложить к перемычке, чтобы она двигалась с постоянным ускорением a? Сопротивлением шин и перемычки можно пренебречь. (33 %).

4. Утром через маленькое отверстие в шторе, закрывающем окно, на противоположную стену падает луч солнечного света. Оцените, на какое расстояние за минуту переместится пятно света по стене. (57 %).

5. Однородная спираль подключена к источнику напряжения и разогрета до красного каления. Половину спирали растягивают. В результате растянутая половина заметно темнеет, а нерастянутая становится ярче. Объясните явление. (25 %).

Вариант 2

1. В стакан, наполовину заполненный жидкостью плотностью ρ, опускают удерживаемый в вертикальном положении цилиндр, по высоте равный высоте стакана (рис. 3). Цилиндр оказывается в равновесии, когда от его нижнего края до дна остается четверть высоты стакана. Чему равна плотность материала цилиндра, если его сечение S, а сечение стакана S_0? Трения нет. (65 %).

2. На расстояниях d от левой и b от правой заземленных пластин параллельно им расположена незаряженная сетка (рис. 4). Через малые отверстия в пластинах пролетают частицы с зарядом q и массой m, скорость которых $\vec{v}_0$ перпендикулярна пластинам. На сколько изменится время пролета этих частиц, если на сетку подать потенциал $-\varphi$? (43 %).

3. Две одинаковые пружины жесткостью k и длиной l каждая в недеформированном состоянии соединены последовательно (рис. 5). Концы пружины, прикрепленной к стенке, связаны нитью длиной $L>l$, рвущейся при натяжении T. Какую наименьшую скорость надо сообщить телу массой m на конце второй пружины, чтобы нить порвалась? (45 %).

4. Оцените, во сколько раз увеличивается при использовании бинокля расстояние, с которого еще можно различить слабый источник света ночью. (34 %).

5. Термос заливают доверху кипятком и закрывают пробкой. Пробка держится.

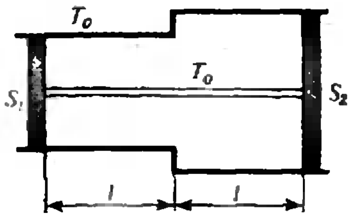


Рис. 1.

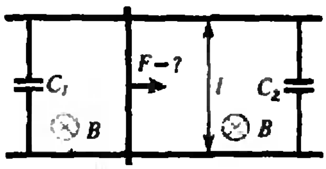


Рис. 2.

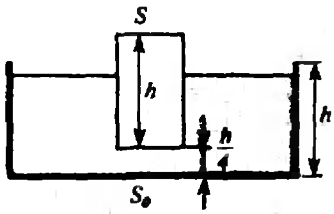


Рис. 3.

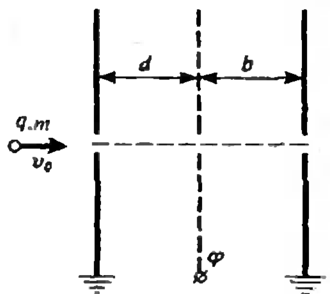


Рис. 4.

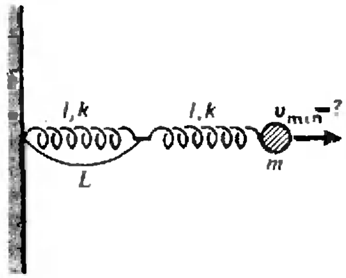


Рис. 5.

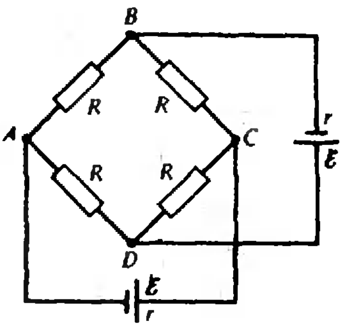


Рис. 6.

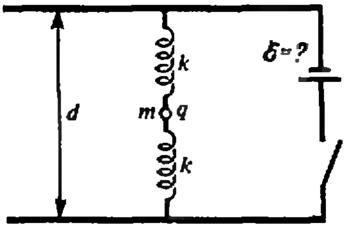


Рис. 7.

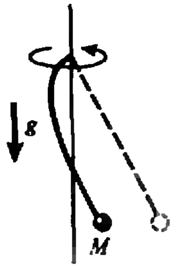


Рис. 8.

А если из термоса отлить половину горячей воды и снова закрыть пробкой, то через некоторое время она выскакивает. Объясните явление. (48 %).

Вариант 3

1. Цилиндр разделен на два равных отсека перегородкой с отверстием, закрытым пробкой. Пробка вылетает при перепаде давлений Δp. С одного конца цилиндр закрыт наглухо, с другого — поршнем. В обоих отсеках в начальный момент времени находится газ под давлением p. Поршень начинают медленно вытягивать, так что температура газа не меняется. После вылета пробки движение прекращают. Найдите установившееся давление в сосуде. (65 %).

2. На рисунке 6 изображена так называемая мостовая схема из четырех одинаковых резисторов сопротивлением R и двух одинаковых батареек с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Найдите величины токов, текущих через резисторы. (57 %).

3. Между двумя одинаковыми сжатыми на величину x_0 пружинами жесткостью k находится шарик, масса которого m и заряд q. Пружины прикреплены к двум параллельным проводящим пластинам, расстояние между которыми d (рис. 7). Пружина рвется, если растягивающая сила превысит величину T. Какую ЭДС должен иметь источник, чтобы при его подключении к пластинам одна из пружин порвалась? Силой тяжести можно пренебречь, пружины непроводящие. (26 %).

4. Оцените максимальное время лунного затмения (до Луны примерно $4 \cdot 10^5$ км). (42 %).

5. Один и тот же груз прикрепляют сначала к тонкой нити, а потом к толстому гибкому шнуру той же длины. При вращении вокруг вертикальной оси нить оказывается прямолинейной, а шнур — заметно изогнутым (рис. 8). Объясните явление. (43 %).

Публикацию подготовили А. Больбот, Г. Меледин

Московский авиационный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если разность пятого и первого членов прогрессии в пять раз больше разности третьего и первого ее членов.

2. Решите уравнение

$$2\cos^4 x - \cos 2x = \frac{3}{4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 \log_{0,2}\frac{(x-2)(x-1)}{x+3} \geqslant$$
$$\geqslant \log_{0,2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 \log_2\frac{(x-2)(x-1)}{11-x}.$$

4. На координатной плоскости отмечены точки A (1; 0), B (−1; 0), C (3; 0). Изобразите на координатной плоскости множество таких точек D, для которых величина угла ADC меньше 30°, а разность величин углов BDC и ADC больше 60°.

5. На станцию привезли несколько одинаковых контейнеров, полных телевизоров. Телевизоры перегрузили в вагоны одинаковой емкости. Получилось 7 полных вагонов, и еще осталось 5 телевизоров. Через неделю привезли другое количество таких же контейнеров. При перегрузке получилось 11 полных вагонов, а в 12-м не хватало 1 телевизора до полноты. Сколько телевизоров вмещает 1 контейнер (известно, что это число больше 1)?

6. Площадь основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $HABCD$ равна 33. Сфера проходит через точку B и пересекает боковое ребро HC в точках M и K так, что $CM:CK:CH=2:3:5$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ребро CB перпендикулярно радиусу сферы, проходящему через точку B.

Вариант 2

1. Три числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите

$$\frac{\log_b 3 \cdot (\log_a c - \log_c \sqrt{a})}{\log_a 9 - 2\log_c 3}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$16|x^2-2(x+|x|)+1|<1.$$

4. В окружность радиусом 13 вписан четырехугольник, один из углов между диагоналями которого равен 120°. Длины диагоналей равны 10 и 24. Найдите длину наибольшей стороны четырехугольника.

5. Найдите все целые числа, каждое из которых является первым членом арифметической прогрессии с разностью, равной 7, и суммой первых нескольких членов, равной 2744.

6. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, если известно, что объем пирамиды $AMKP$ равен V, здесь M — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, K — точка пересечения диагоналей грани $A'B'C'D'$ и P — точка пересечения медиан треугольника $BC'C$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Наблюдатель стоит на платформе около передней площадки вагона электропоезда и замечает, что после начала равноускоренного движения первый вагон проходит мимо него за время $t=5$ с. Определите время, за которое пройдет мимо наблюдателя шестой вагон, если длина каждого вагона $L=15$ м, а расстояние между вагонами $l=1{,}5$ м.

2. Два одинаковых тела массой $m=15$ кг каждое связаны идеальной нитью и движутся по горизонтальной поверхности под действием силы, равной $F=118$ Н и направленной под углом $\alpha=45°$ к горизонту (рис. 1). Коэффициент трения тел о поверхность $\mu=0{,}02$. Определите ускорение тел и силу натяжения нити между ними.

3. Один моль одноатомного идеального газа расширяется по закону $pV^2=\text{const}$. Работа, совершаемая газом, подсчитывается при этом по формуле $A=p_1V_1-p_2V_2$, где p_1 и V_1 — давление и объем газа в начальном состоянии, а p_2 и V_2 — в конечном. Найдите молярную теплоемкость газа в данном процессе.

4. Две бесконечные одноименно и равномерно заряженные плоскости пересекаются под прямым углом друг другу (рис. 2) Найдите напряженность электростатического поля в точке A, расположенной вблизи линии пересечения. Поверхностная плотность заряда равна $\sigma=10^{-9}$ Кл/м^2 и одинакова для обеих плоскостей.

5. Для схемы, изображенной на рисунке 3, мощность, выделяемая на резисторе сопротивлением R_1, не меняется при изменении величины сопротивления R_2 второго резистора. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

6. Фотоэффект у некоторого металла начинается при частоте падающего света $\nu_0=6\cdot10^{14}$ с$^{-1}$. Найдите длину волны света, при которой освобождаемые с поверхности этого металла электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U=3$ В. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Вариант 2

1. Снаряд вылетает из орудия со скоростью $v_0=10^3$ м/с под углом $\alpha_0=60°$ к горизонту. Найдите кратчайшее расстояние от орудия до точки, в которой снаряд разорвался, если известно, что в момент разрыва вектор его скорости составлял с горизонтом угол $\alpha=45°$. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. В сосуде объемом $V=0{,}5$ л находится идеальный газ при давлении $p=1$ атм и температуре $t=27$ °С. Сколько молекул газа нужно выпустить из сосуда, чтобы давление в нем уменьшилось в 2 раза? Температура газа не изменяется.

3. Узкую цилиндрическую запаянную с одного конца трубку длиной $L=45$ см погружают открытым концом в сосуд со ртутью на глубину $l=40$ см. Атмосферное давление равно $H=76$ см рт. ст. Какова будет высота столбика ртути в трубке?

4. Во сколько раз изменилось расстояние между пластинами плоского конденсатора, отключенного от источника, если для раздвижения пластин была затрачена работа $A=10^{-9}$ Дж? Заряд конденсатора $q=10^{-10}$ Кл, площадь пластин $S=10$ см^2, первоначальное расстояние между пластинами $d=0{,}885$ мм.

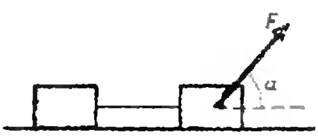


Рис. 1.

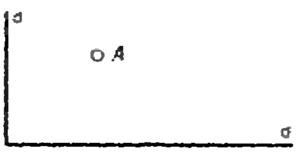


Рис. 2.

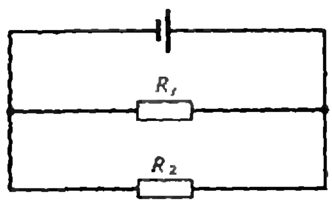


Рис. 3.

5. Плоский виток площадью $S=10$ см^2 помещен в однородное магнитное поле индукцией $B=0,1$ Тл, перпендикулярное к плоскости витка. Сопротивление витка $R=1$ Ом. Какой заряд протечет по витку, если поле будет исчезать с постоянной скоростью?

6. Электрон, движущийся со скоростью $v \ll c$, при соударении с атомом водорода, находившимся в невозбужденном состоянии, возбуждает его, отдавая всю свою энергию. Какую наименьшую скорость должен иметь налетающий электрон, чтобы атом водорода, переходя снова в невозбужденное состояние, излучил только одну линию спектра?

Публикацию подготовили Г. Солохина, С. Станченко

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$4\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=3\cos 3x.$$

2. Разность между натуральным четырехзначным числом A и числом, записанным теми же цифрами, что и A, но в обратном порядке, равна 90. Из всех чисел A найдите наибольшее, если известно, что сумма его цифр сотен и единиц принимает наименьшее возможное значение.

3. Решите неравенство

$$(-x^2+\sqrt{5}x-6)\frac{x-a}{\log_3(x-2)}<0,\ a\in\boldsymbol{R}.$$

4. Верхним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $A_1B_1=B_1C_1$, а угол между медианой B_1D и стороной A_1B_1 равен φ. Через центр описанной около треугольника ABC окружности и точку пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что диагональ B_1C боковой грани BB_1C_1C имеет длину d, а $\angle BB_1A=\alpha$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin^3 x-\cos^3 x=-\sqrt{17}\,(\sin^4 x-\cos^4 x).$$

2. Нужно вспахать три поля одинаковой площади. Первое и третье поле первая и третья бригады начала пахать в 8 часов утра, а второе — вторая бригада двумя часами раньше. В некоторый момент времени оказалось, что участки, вспаханные на первом и втором полях, одинаковы по площади, а еще через 2 часа равными по площади оказались участки, вспаханные на втором и третьем полях. Известно, что первое поле было вспахано за 30 часов, а 50 % третьего поля — за 20 часов. За какое время вспахали второе поле, если скорость вспашки каждого поля была постоянной?

3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+c+63}-\sqrt[3]{x+c-1}=4$$

и найдите все значения $c\in\boldsymbol{R}$, при которых все корни этого уравнения положительны.

4. Длина высоты SO правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ равна h, боковое ребро SP наклонено к плоскости основания $PQRT$ под углом γ. Сфера, касающаяся плоскости основания и всех боковых ребер пирамиды, пересекается плоскостью, равноудаленной от всех вершин этой пирамиды. Определите радиус окружности, по которой пересекаются эти сфера и плоскость.

Физика

Устный экзамен

Билет 1

1. Тело начинает двигаться по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Какова зависимость от времени полного ускорения тела?

2. Найдите среднюю энергию атома аргона, если $\nu=2$ кмоля этого газа в баллоне объемом $V=10$ л создают давление $p=10^6$ Па.

3. Металлический шарик, удаленный от других тел, облучают монохроматическим светом длиной волны $\lambda=2000$ Å. Шарик, теряя фотоэлектроны, заряжается до максимального потенциала $\varphi_{max}=3{,}0$ В. Опре-

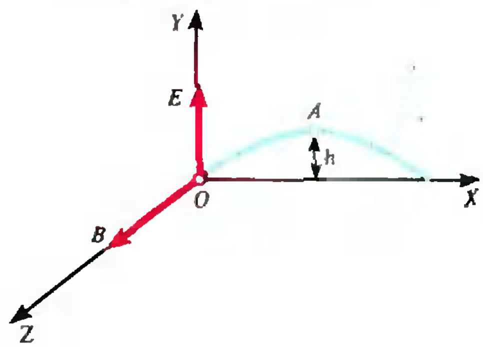


Рис. 1.

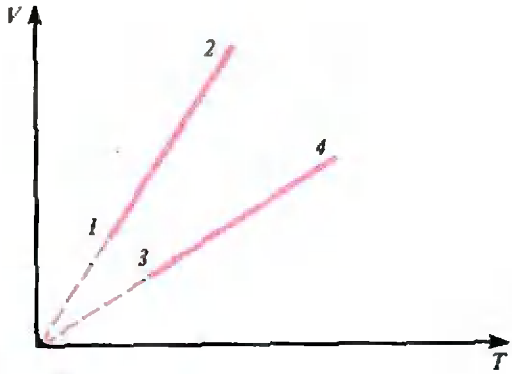


Рис. 2.

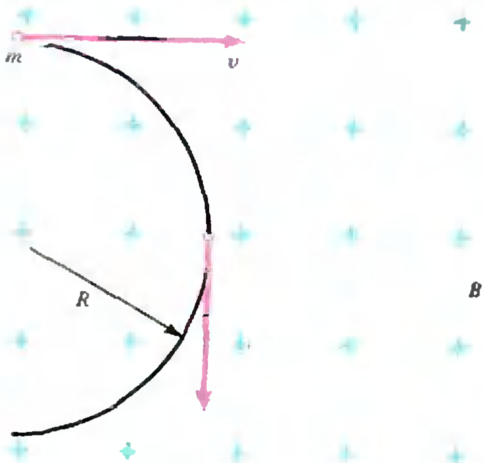


Рис. 3.

делите работу выхода электрона для шарика.

4. Протон, отношение заряда к массе которого $e/m = 1 \cdot 10^8$ Кл/кг, движется без начальной скорости из точки O в области пространства, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью $E = 10$ кВ/м и индукцией $B = 0{,}02$ Тл (рис. 1). Найдите ускорение протона в вершине траектории — точке A, если $h = 0{,}5$ м.

Билет 2

1. Процессы, изображенные на рисунке 2, происходят с одной и той же массой идеального газа. Какие это процессы? Как отличаются давления в состояниях *1* и *4*?

2. Заряженная частица массой m влетает в однородное магнитное поле со скоростью $\vec{v}$ (рис. 3). Вектор индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен за рисунок. Частица движется по окружности радиусом R. Определите величину и знак заряда частицы.

3. Найдите натяжения нити массой m, соединяющей тела A и B, в точках соединения с ними (рис. 4).

4. Сходящийся пучок света имеет вид конуса с вершиной в точке S. На пути пучка помещается собирающая линза так, что ось конуса совпадает с главной оптической осью линзы. Расстояние от оптического центра линзы до точки S равно $l = 30$ см. В какой точке пересекутся лучи после преломления в линзе, если ее оптическая сила $D = 4$ дптр?

Билет 3

1. Запишите уравнение движения тела, брошенного под углом к горизонту.

2. Чему равно давление одноатомного газа, занимающего объем $V = 2$ л, если его внутренняя энергия $U = 300$ Дж?

3. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см вплотную прилегает к плоскому зеркалу (рис. 5). На оптической оси линзы, на высоте $d = 10$ см от нее, находится светящаяся точка S. Где находится изображение этой точки?

4. На гладкий стержень надеты две муфточки из изолирующего материала, соединенные пружиной и связанные нитью (рис. 6). Каждая из муфточек несет заряд $q = 0{,}33 \cdot 10^{-7}$ Кл. К середине нити приложена некоторая сила $\vec{F}$, под действием которой система движется без трения по горизонтальной плоскости, при этом поло-

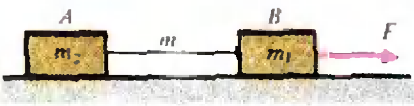


Рис. 4.

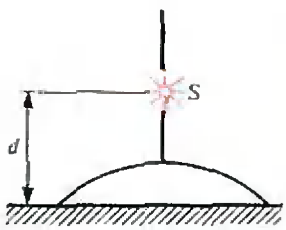


Рис. 5.

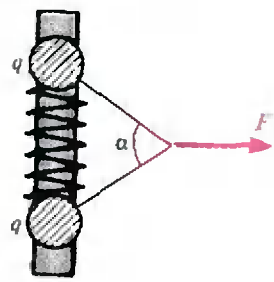


Рис. 6.

винки нити образуют угол $\alpha=60°$. Длина недеформированной пружины равна длине нити $l_0=0{,}2$ м. Определите ускорение системы, если ее масса $m=0{,}2$ кг, а жесткость пружины $k=0{,}1$ Н/м.

Публикацию подготовили А. Архипов, В. Грушин, Н. Мирошин, А. Руденко, Д. Храмченков

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тележка массой $M=100$ кг с находящимся на ней человеком массой $m=60$ кг движется со скоростью $v=0{,}5$ м/с. Человек начинает идти по тележке в направлении ее движения с постоянной скоростью $u=1{,}33$ м/с относительно тележки. Какой путь пройдет человек относительно земли за время $t=3$ с?

2. В ракете, взлетающей вертикально вверх с ускорением $a=5{,}2$ м/с^2, установлены часы с маятником. На какую высоту взлетит ракета за $t=10$ с по маятниковым часам в ракете?

3. В цилиндр с поршнем поместили тело массой $m=40$ г. Когда расстояние между поршнем и дном цилиндра составляло $l_1=5$ см, давление воздуха в цилиндре равнялось $p_1=4\cdot10^5$ Па. При увеличении этого расстояния до $l_2=7{,}5$ см давление упало до $p_2=2\cdot10^5$ Па. Определите по этим данным плотность материала, из которого сделано тело. Температура воздуха в цилиндре постоянна, сечение цилиндра $S=40$ см^2.

4. В сосуде объемом $V=100$ л при температуре $t=30$ °С находится воздух с относительной влажностью $f=30$ %. Какова будет относительная влажность при той же температуре, если в сосуд дополнительно испарить $m=1$ г воды? Давление насыщенных паров воды при 30 °С составляет $p_н=4{,}2$ кПа, молярная масса воды $M=18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К·моль).

5. Шарик массой $m=10$ г, несущий заряд $q=8\cdot10^{-7}$ Кл, бросают горизонтально в вакуумной камере на высоте $h=0{,}6$ м над полом. В камере создано вертикальное электрическое поле напряженностью $E=10^5$ В/м. При перемене направления этого поля на противоположное дальность полета (по горизонтали) возрастает на $\Delta x=0{,}6$ м. Определите скорость бросания шарика.

6. Металлический шарик массой $m=1$ г и зарядом $q=10^{-7}$ Кл подвешен на легкой диэлектрической нити в горизонтальном однородном электрическом поле напряженностью $E=10^5$ В/м. Шарик отводят в сторону, противоположную направлению электрического поля, так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Определите натяжение нити в момент прохождения шариком наинизшего положения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

7. Какую ЭДС развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи $R=300$ Ом на вращение ротора затрачивается мощность $N=50$ Вт, а потери на трение составляют $k=4$ % от затраченной мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затрачивать при сопротивлении цепи $R_1=60$ Ом?

8. Прямоугольная рамка размером $a\times b=10\times20$ см, изготовленная из стальной проволоки сечением $S=0{,}2$ мм^2, вращается в земном магнитном поле вокруг горизонтальной оси, проходящей через одну из сторон рамки перпендикулярно плоскости магнитного меридиана. Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли $B_г=30$ мкТл, вертикальная $B_в=40$ мкТл. Определите заряд, протекающий в рамке при повороте ее из вертикального положения в горизонтальное, если рамка замкнута на резистор сопротивлением $R=1{,}7$ Ом. Удельное сопротивление стали $\rho=1{,}2\cdot10^{-7}$ Ом·м.

9. Луч отражается от плоского зеркала, падая на него под углом $\alpha=30°$. На какое расстояние сместится отраженный луч, если поверхность зеркала покрыть стеклом толщиной $d=3$ см? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. Одна из пластин плоского незаряженного конденсатора освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=100$ нм, причем выбитые электроны попадают на вторую пластину. Работа выхода электронов из металла, из которого изготовлены пластины конденсатора, $A=10^{-18}$ Дж, площадь пластин $S=48$ см^2, расстояние между пластинами $d=3$ мм. Определите максимальный заряд конденсатора. Постоянная Планка $h=6{,}63\times10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовил А. Маковкин

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

специальность «Прикладная математика» факультета информатики и экономики)

1. Упростите и вычислите без таблиц

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2}).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\log_3(3^x-8)}{2-x}=1.$$

В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько — их сумму.

3. Решите уравнение

$$9\cdot4^{x+0,5}=19\cdot6^x+4\cdot9^{x+0,5}.$$

В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько — их сумму.

4. Решите неравенство

$$|x-3|^{2x^2-7x}\geqslant1.$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству и принадлежащих отрезку $[-6;\ 8]$.

5. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член прогрессии.

6. Решите уравнение $f'(x)=0$, где

$$f(x)=4\sin2x-3\cos2x-10x.$$

В ответе запишите количество решений, принадлежащих отрезку $[0;\ 2\pi]$.

7. Две точки двигаются по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они двигаются в разных направлениях, то встречаются каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки, ответ дайте в м/мин. В ответе запишите произведение найденных скоростей.

8. В шар радиуса 3 вписан конус с наибольшей боковой поверхностью. Найдите высоту конуса.

9. Окружность с центром в точке O и радиусом $R=6+4\sqrt{2}$ касается прямой в точке A. На окружности взята точка B так, что угол AOB равен 45°. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности в точке B и данной прямой.

10. Упростите выражение и вычислите без таблиц

$$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{13}{15}\pi+\sin\frac{23}{15}\pi+\sin\frac{\pi}{6}.$$

11. В правильную треугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Найдите разность объемов описанного и вписанного конусов, если высота пирамиды равна 4 и длина окружности основания описанного конуса равна $\sqrt{3}\pi$.

12. При каком наименьшем целом значении параметра a уравнение

$$(x^2-2x)^2-(a+2)\cdot(x^2-2x)+3a-3=0$$

имеет 4 различных корня?

Вариант 2

(факультет полупроводниковых материалов и приборов, физико-химический факультет, все специальности факультета информатики и экономики, за исключением «Прикладной математики»)

1. Найдите $\log_3 a^2$, если $2\log_a\sqrt{3}=5$.
2. Упростите и вычислите при $x=\sqrt{2}$

$$\left(\frac{x-x^{1/3}}{x^{2/3}-1}-2x^{1/3}+1\right)\frac{1+x^{1/3}}{1-x^{2/3}}+x^2.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3x+\log_9x+\log_{27}x=\frac{11}{6}.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

4. Найдите целое значение m, при котором неравенство

$$x^2-mx>\frac{2}{m}$$

выполняется при любом x. В ответе запишите найденное значение m, а если таких значений несколько, то их сумму.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Груз весом 30 Н производит давление на опору. Если вес груза уменьшить на 10 Н, а площадь опоры увеличить на 2 см², то давление груза уменьшится вдвое. Найдите исходную площадь опоры (в см²).

7. Решите неравенство

$$(0,5)^{x^2}\cdot4^{x+1}>64^{-1}.$$

В ответе запишите количество целых чисел x, удовлетворяющих неравенству.

8. Найдите наибольшее значение

функции

$$y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$$

на отрезке $[-1;\ 3]$.

9. Упростите выражение при $\alpha=25^\circ$:

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

10. Длина хорды окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

11. Решите уравнение

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)=\cos x.$$

В ответе укажите количество корней уравнения на отрезке $[0;\ \pi]$.

12. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите квадрат отношения площади его основания к площади боковой поверхности.

Вариант 3

(факультеты металлургии черных металлов и сплавов, металлургии цветных, редких металлов и сплавов и технологический)

1. Решите уравнение

$$4^{x+1,5}+7\cdot 2^{x+1}=4.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

2. Вычислите $\cos\alpha$, если

$$\operatorname{tg}\alpha=-3\frac{3}{7},\ \text{и}\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

3. Вычислите без таблиц

$$\log_{\sqrt{6}}\log_7\sqrt[3]{\sqrt{7}}.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

5. Рабочему для выполнения работы был дан определенный срок. Проработав два дня, он придумал приспособление, увеличивающее производительность труда в 1,5 раза. В результате работа была закончена на два дня раньше срока. На несколько дней было рассчитано выполнение работы?

6. Решите неравенство

$$\frac{x}{x+2}\leqslant\frac{1}{1-x}.$$

В ответе запишите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

7. Решите неравенство

$$\log_x(2x-3)<1.$$

В ответе запишите целое значение x, удовлетворяющее неравенству, а если таких значений несколько, то их сумму.

8. Точка движется по закону

$$S(t)=\frac{t}{\pi}\sin\pi t.$$

Найдите скорость точки в момент времени $t=1$.

9. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми 60°. Величина одной силы равна $\frac{4}{\sqrt{19}}$ Н, а другой силы равна $\frac{6}{\sqrt{19}}$ Н. Найдите величину равнодействующей этих двух сил (в ньютонах).

10. Решите уравнение

$$\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, в случае нескольких корней запишите их сумму.

11. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобочную трапецию, если периметр трапеции равен 2, а острый угол составляет 30°.

12. Основанием пирамиды является прямоугольник с длинами сторон 3 и 4. Боковая грань, проведенная к меньшей стороне прямоугольника, образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Рейтинговый экзамен по физике в МИСиСе

В 1990/91 учебном году в Московском институте стали и сплавов впервые проводились рейтинговые экзамены по физике и математике для всех желающих (а также для слушателей подготовительных курсов). В течение учебного года, с декабря по апрель, было проведено 3 экзамена (или тура) по физике и 3 экзамена (или тура) по математике. Экзамены были платными.

Каждый экзамен по физике включал 6 задач по математике — 10 задач различной сложности.

Задачи по физике оценивались по 20-балльной, по математике — по 72-балльной системе.

Абитуриенты, набравшие по итогам всех экзаменов 140 и более баллов (из 276 возможных), зачислялись в институт на любую специальность по выбору без вступительных экзаменов. (На специальности, конкурс на которые был невелик, зачисление проводилось при значительно меньшем количестве набранных баллов.)

Ниже приводится по одному варианту из всех трех туров рейтингового экзамена по физике. В каждом варианте задачи расположены в порядке возрастания сложности; они оценивались по следующей шкале: первая задача — 1 балл, вторая и третья задачи — по 2 балла, четвертая задача — 3 балла, пятая — 4 балла, шестая — 8 баллов.

Тур 1

1. Тело двигалось прямолинейно с постоянной скоростью 10 м/с. В некоторый момент времени на тело начала действовать сила, сообщающая ему ускорение, направленное в сторону, противоположную вектору скорости, и равное по модулю 2 м/с^2. Вычислите путь, пройденный телом через 7 с после начала действия силы.

2. На графике (рис. 1) представлено изменение ускорения материальной точки во времени. Начальная скорость тела (в момент $t_0=0$) была равна 12 м/с. Считая движение материальной точки прямолинейным, вычислите ее скорость в момент времени $t=4$ с.

3. Шар массой 3 кг опирается на две гладкие (трение отсутствует) плоскости, образующие с горизонталью углы $\alpha=30°$ и $\beta=15°$ (рис. 2). Определите величину большей из сил давления на плоскости. Считайте $g=9{,}8$ м/с^2.

4. Ледяная гора составляет с горизонталью угол $\alpha=10°$. По ней снизу вверх толкнули санки, которые, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывают вниз по тому же пути. Вычислите коэффициент трения, если время спуска санок в 2 раза больше времени их подъема.

5. Тело начинает двигаться с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью 5 км/с. Считая, что масса тела остается постоянной, а атмосфера у Земли отсутствует, определите, на какую высоту от поверхности Земли поднимется тело. Масса Земли $6\cdot10^{24}$ кг, ее радиус — $6{,}4\cdot10^6$ м, гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг · с^2). Ответ дайте в километрах.

6. Платформа длиной 13 м и массой 12 т начинает перемещаться под действием постоянной силы, равной 2 кН и направленной горизонтально (рис. 3). Одновременно с началом движения платформы из бункера, расположенного у правого края платформы, на нее начинает высыпаться песок. Скорость нагружения платформы постоянна и равна 100 кг/с. Песок на платформу падает по вертикали. Определите скорость платформы с песком через 30 с после начала движения.

Тур 2

1. Некоторое количество газа сначала сжали изотермически так, что объем газа уменьшился в два раза, а затем расширили изобарически до первоначального объема. Определите отношение первоначальной температуры газа к его конечной температуре.

2. Имеется два баллона с газом. В первом баллоне находится 10^{24} молекул газа при температуре 300 К, а во втором баллоне такого же объема — 10^{22} молекул газа при температуре 500 К. Найдите отношение давления газа в первом баллоне к давлению во втором баллоне.

3. В замкнутом сосуде емкостью 1000 см^3 находится 1 г воды и водяного пара при температуре 17,2 °С. Давление насыщенного пара при этой температуре равно 14,72 мм рт. ст. Какую часть от общей массы воды и пара составляет водяной пар при указанных условиях? Ответ дайте в процентах. Масса моля воды равна 18 г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К), плотность ртути 13,6 г/см^3.

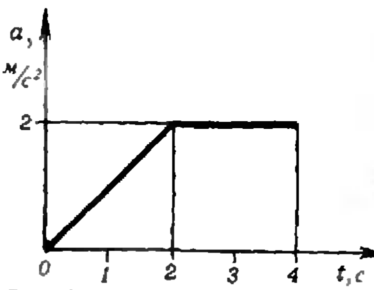


Рис. 1.

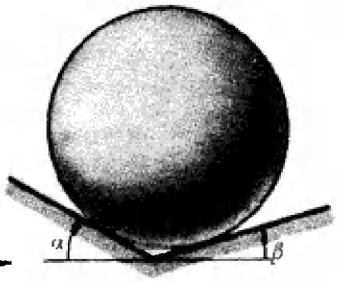


Рис. 2.

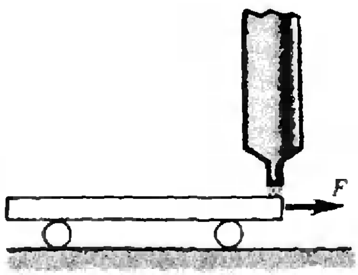


Рис. 3.

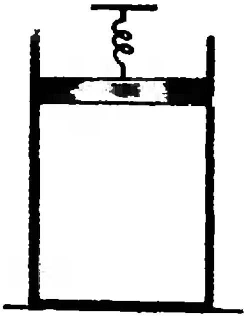


Рис. 4.

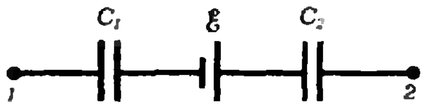


Рис. 5.

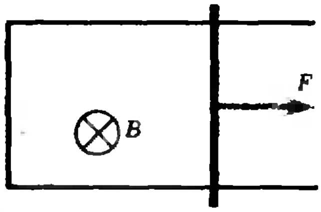


Рис. 6.

4. Какую среднюю энергию надо затратить, чтобы отделить один атом алюминия от куска алюминия массой 50 г при температуре 0 °С? Теплоемкость твердого алюминия меняется по закону $C=C_0(1+\alpha t)$, где $C_0=23{,}3$ Дж/(моль · К) — молярная теплоемкость алюминия при 0 °С, $\alpha=0{,}0004$ К$^{-1}$. Температура плавления алюминия 660 °С, температура испарения 2450 °С, удельная теплота плавления $3{,}9\cdot10^5$ Дж/кг, молярная теплота испарения 294 кДж/моль. Молярная масса алюминия 27 г/моль. Теплоемкость жидкого алюминия равна максимальной теплоемкости твердого алюминия. Ответ дайте в электронвольтах с точностью до одной значащей цифры (1 эВ$=1{,}6\times10^{-19}$ Дж).

5. В цилиндре, закрытом поршнем массой 1 кг и площадью 100 см^2, подвешенном на невесомой недеформированной пружине (рис. 4), находится 4 моля газа при температуре 300 К. Жесткость пружины равна 50 Н/см. При нагревании газа совершена работа 250 Дж. Какой стала температура газа в цилиндре? Давление снаружи равно 10^5 Па. Трением и тепловыми потерями можно пренебречь.

6. В вертикальном герметичном цилиндре движется поршень. Над и под поршнем находятся одинаковые массы азота при температуре 300 К. В исходном состоянии вес поршня уравновешивается разностью сил давления газа, при этом объем нижней части цилиндра в три раза меньше объема его верхней части. Чему равно отношение объемов верхней и нижней частей цилиндра при температуре газа 400 К? Трением и тепловыми потерями можно пренебречь.

Тур 3

1. Два точечных заряда находятся в одной плоскости. Заряд $q_1=10^{-6}$ Кл имеет координаты $x_1=0$ и $y_1=3$ м, заряд $q_2=-2\cdot10^{-6}$ Кл — $x_2=1$ м и $y_2=0$. Определите потенциал электрического поля в точке с координатами $x_0=4$ м, $y_0=6$ м.

2. В схеме (рис. 5) $C_1=3$ мкФ, $C_2=2$ мкФ, $\mathscr{E}=10$ В, а разность потенциалов, $\varphi_1-\varphi_2=5$ В. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C_1.

3. Заряд $q=10^{-6}$ Кл, летящий со скоростью 10^5 м/с, попадает в электромагнитное поле, в котором вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ ($E=10^4$ В/м) перпендикулярен вектору магнитной индукции $\vec{B}$ ($B=0{,}2$ Тл). Вектор скорости заряда находится в той же плоскости, что и векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, и составляет с вектором $\vec{B}$ угол 60°. Определите величину силы, действующей на заряд со стороны электромагнитного поля.

4. По проводнику, сопротивление которого 12 Ом, за 12 секунд протек заряд 30 Кл. Ток за указанный промежуток времени уменьшался прямо пропорционально времени и упал до нуля. Определите напряжение на концах проводника в момент времени $t=3$ с.

5. Перемычка, замыкающая П-образный провод, перемещается под действием горизонтальной силы $\vec{F}$ с постоянной скоростью 10 м/с (рис. 6). Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле. Определите величину силы $\vec{F}$, если в контуре каждую секунду выделяется количество теплоты, равное 1 Дж. Массой перемычки можно пренебречь.

6. По двум гладким параллельным шинам, составляющим угол 30° к горизонту, скользит без трения под действием силы тяжести медная перемычка массой 10^{-2} кг. Шины замкнуты на резистор сопротивлением 2 Ом. Расстояние между шинами 0,2 м. Шины и перемычка находятся в магнитном поле, индукция которого равна 0,5 Тл и перпендикулярна наклонной плоскости, образуемой шинами и сопротивлением. Пренебрегая сопротивлением шин и перемычки, определите величину установившейся постоянной скорости перемычки.

Публикацию подготовил В. Башкиров

Информация

Конференция клуба «Глюон»

Московский клуб «Глюон» создан при Московском инженерно-физическом институте для работы с молодыми людьми, увлекающимися математикой, физикой, информатикой и астрономией.

Члены клуба — школьники, лицеисты, гимназисты — собираются на еженедельные семинары, где обсуждают интересные задачи, сами планируют и ставят эксперименты, встречаются со студентами и учеными московских вузов, рассказывают о своих достижениях.

Итогом работы клуба в 1990—1991 учебном году стала конференция, состоявшаяся в конце марта 1991 года на западном берегу Крыма в поселке Николаевка.

На конференцию, кроме москвичей, членов клуба, были приглашены учащиеся физико-математических школ, лицеев и гимназий из других городов страны, так что в Николаевку приехали школьники и их руководители из Киева, Красноярска, Москвы, Новгорода, Тбилиси, Харькова.

Тематика 24-х докладов, зачитанных на двух секциях (математики и физики), была очень разнообразной.

Жюри конференции, состоявшее из преподавателей вузов, лицеев и гимназий, признало лучшими по секции физики доклады *Б. Барышникова* (Новгород) «Параметрический резонанс в космической технике», *И. Тучина* (Москва) «Распределение температуры в металлических изделиях», *Б. Кириллова* «Исследование термической интерференции звука».

По секции математики лучшими признаны доклады *С. Рязанцева* (Москва) «Построение на плоскости ограниченными средствами», *С. Ельцева* (Москва) «О геометрических доказательствах некоторых неравенств», *Г. Челидзе* (Тбилиси) «О рациональных точках на кривых второго порядка».

Многие участники конференции были награждены дипломами и специальными призами клуба «Глюон».

Сильнейшее впечатление на участников произвел тест на одаренность по американской методике. Результаты теста у многих из них оказались более высокими, чем у лучших из их американских сверстников.

Очень интересной была и культурная программа, самым ярким событием которой была автобусная поездка в Севастополь с посещением развалин древнегреческого города-государства Херсонес.

Клуб «Глюон» надеется, что подобные конференции станут традиционными и будут проводиться ежегодно, несмотря на все трудности, переживаемые сейчас всеми нами.

Начиная с 1991—1992 учебного года, клуб «Глюон» учреждает ежегодные премии за лучшие научные работы школьников по математике, физике, астрономии и информатике.

Присуждаться будут две премии по одной тысяче рублей каждая, а также специальные премии и призы.

Будут также проводиться различные интеллектуальные соревнования: международная тест-рейтинговая олимпиада, тест-анкетирование, конкурсы и фестивали знаний.

Первая международная тест-рейтинговая олимпиада уже прошла в октябре 1991 года в Ашхабаде.

Мы приглашаем всех школьников и их руководителей, желающих принять участие в мероприятиях клуба или высказать предложение о других возможных формах работы, сообщить нам об этом по адресу: 115580, Москва, а/я 10. Клуб «Глюон».

Президент клуба «Глюон»
В. Альминдеров

Ответы к кроссворду

По горизонтали: 5. Галилей. 6. Гершель. 9. Мегрец. 10. Плеяды. 14. Титов. 15. Новолуние. 16. Надир. 19. Юнона. 22. Земля. 23. Водолей. 24. «Восток». 25. Кеплер. 29. Дельфин. 30. Гиады. 31. Болид. 36. Мицар. 37. Микроскоп. 38. Сарос. 41. Алголь. 42. «Пионер». 43. Процион. 44. Луноход.

По вертикали: 1. Гагарин. 2. Денеб. 3. Фекда. 4. Альтаир. 7. Орион. 8. Зенит. 11. «Молния». 12. Плутон. 13. Галлей. 17. Андромеда. 18. Рефлектор. 20. Королев. 21. Гевелий. 26. Эридан. 27. Ньютон. 28. Экипаж. 32. Гиппарх. 33. Виток. 34. Фобос. 35. Комаров. 39. Алиот. 40. Регул.

Олимпиады

Математическая олимпиада тихоокеанских стран

В последнее десятилетие во многих странах проводятся математические олимпиады школьников. Естественно, что стремление к общению в этой области переросло рамки Международной математической олимпиады, число стран-участниц которой увеличилось с 22-х в 1978 году до 60-ти в 1991 году. Поэтому стали практиковаться различные региональные олимпиады: Балканская (Болгария, Греция, Югославия и др.), Иберо-американская (стран, говорящих на испанском или португальском языке), стран Персидского залива (Бахрейн, Ирак, Кувейт, Объединенные Арабские Эмираты, Оман, Саудовская Аравия), тихоокеанских стран и другие.

Математическая олимпиада тихоокеанских стран существует с 1989 года. Тогда в ней участвовали 4 государства, в следующем году — уже 9 стран, а в 1991 году — 12: Австралия, Гонконг, Канада, Китай, Колумбия, Корея (Южная), Малайзия, Мексика, Новая Зеландия, Сингапур, Таиланд и Филиппины. Приводим задачи олимпиады 1991 года. На их решение отводилось 4 часа. В скобках после каждой задачи указана страна, предложившая ее.

1. В треугольнике ABC точка G — его центр тяжести (точка пересечения медиан), а M — середина стороны BC. Проведем через точку G прямую, параллельную стороне BC, и обозначим через X и Y точки ее пересечения с отрезками AB и AC соответственно. Обозначим далее через Q точку пересечения прямых XC и GB и через P — точку пересечения YB и GC. Докажите, что треугольники MPQ и ABC подобны.

(Канада)

2. На плоскости даны 997 точек. Середины отрезков, соединяющих эти точки, окрашены в красный цвет. Докажите, что имеется не менее 1991 красной точки. Сможете ли вы найти расположение точек, при котором будет ровно 199 красных точек?

(Гонконг)

3. Положительные вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k)^2}{a_k+b_k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(Австралия)

4. На перемене между уроками ученики сели в кружок вокруг учителя, который провел с ними следующую игру. Он начал ходить по часовой стрелке вдоль сидящих учеников и вручать им конфеты по такому правилу: сначала он выбрал одного из учеников и вручил ему конфету, затем он пропустил одного школьника и вручил конфету следующему, затем пропустил двух учеников и вручил конфету следующему и т. д. Найдите, при каком количестве учеников в конце концов (может быть, через много кругов) все ученики получат хотя бы по одной конфете.

(Мексика)

5. Даны две касающиеся окружности C_1 и C_2 и точка P на их радикальной оси, т. е. на их общей касательной, которая перпендикулярна линии центров. Постройте с помощью циркуля и линейки все окружности, касающиеся окружностей C_1 и C_2 и проходящие через точку P.

(Колумбия)

Ответы, указания, решения

[redacted]анные школьные задачи по физике

1. Полезная мощность вентилятора равна кинетической энергии, которую он сообщает воздуху в единицу времени:

$$P=(\Delta m/\Delta t)v^2/2,$$

где $\Delta m/\Delta t$ — масса воздуха, приводимого в движение за 1 секунду, v — скорость потока воздуха. Так как $\Delta m/\Delta t$ пропорционально v, мощность пропорциональна v^3. При увеличении скорости вращения лопастей вентилятора в 2 раза скорость потока возрастает тоже в 2 раза, а полезная мощность возрастает при этом в 8 раз.

2. Совершенная работа равна изменению потенциальной энергии системы:

$$A=mgh+kx^2/2,$$

где x — удлинение пружины. Так как пластинка находится в равновесии, справедливо равенство

$$mg-kx=0.$$

Получаем окончательно

$$A=mg(h+mg/(2k))=150\ \text{Дж}.$$

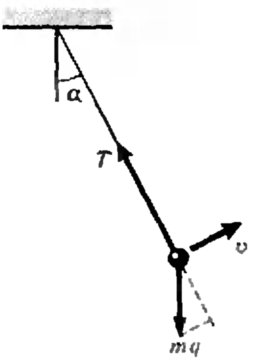


Рис. 1.

3. Если в некоторый момент времени нить отклонена от вертикали на угол α, а скорость шарика равна v, то второй закон Ньютона в проекциях на направление нити имеет вид (рис. 1)

$$T - mg\cos\alpha = mv^2/l,$$

где m — масса шарика, l — длина нити. Видно, что натяжение нити минимально в крайнем положении шара, когда $v=0$, а $\cos\alpha$ — минимальный, т. е. угол α максимальный:

$$T_{\min} = mg\cos\alpha_{\max}.$$

Максимальное натяжение соответствует, напротив, нижнему положению шара:

$$T_{\max} = mg + mv^2_{\max}/2.$$

Скорость шара $v_{\max}$ в этот момент найдем из закона сохранения механической энергии

$$mgl(1-\cos\alpha_{\max}) = mv^2_{\max}/2.$$

Тогда

$$T_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha_{\max}).$$

По условию $T_{\max} = 4T_{\min}$. Отсюда находим искомый угол:

$$\cos\alpha_{\max} = 1/2,\ \alpha_{\max} = 60°.$$

4. Из условия задачи следует, что скорости шаров после соударения одинаковы по модулю, но противоположны по направлению. Запишем законы сохранения импульса и энергии для упругого удара:

$$m_1v = -m_1u + m_2u,$$

$$m_1v^2/2 = m_1u^2/2 + m_2u^2/2,$$

где v — скорость первого шара до удара, u — скорости шаров после удара. Решая эти уравнения, получаем

$$m_1 = m_2/3 = 0{,}2\ \text{кг}.$$

5. Чтобы найти выделившееся количество теплоты, подсчитаем, на сколько конечная механическая энергия меньше начальной:

$$Q = (m_1v^2/2 + m_2gh) - (m_1+m_2)u^2/2.$$

Конечную скорость u найдем из закона сохранения импульса

$$m_1v = (m_1+m_2)u.$$

Решая эти уравнения, находим

$$Q = m_1m_2v^2/(2(m_1+m_2)) + m_2gh = 150\ \text{Дж}.$$

6. На обеих лампочках вместе выделяется мощность

$$P = U^2/(R_1+R_2),$$

где U — номинальное напряжение, R_1 и R_2 — сопротивления лампочек. Эти сопротивления (предполагая их неизменными) выразим через номинальные мощности:

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1},\quad R_2 = \frac{U^2}{P_2}.$$

Тогда получаем

$$P = P_1P_2/(P_1+P_2) = 60\ \text{Вт}.$$

7. Тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема конденсатора, равна

$$q = \frac{P}{V} = \frac{UI}{dS} = \frac{(Ed)(jS)}{dS} = Ej.$$

Отсюда находим

$$E = q/j = 5000\ \text{В/м}.$$

8. Пусть в батарее N элементов. Тогда ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление — r/N, а полезная мощность —

$$P = \mathscr{E}I - I^2r/N.$$

Отсюда находим

$$N = 7.$$

9. Полезная мощность электродвигателя $UI - I^2R$, где R — сопротивление обмотки, равна механической мощности трамвая Fv:

$$UI - I^2R = Fv,$$

откуда

$$R = (UI - Fv)/I^2 = 3\ \text{Ом}.$$

10. По первому закону электролиза масса меди равна

$$m = kq,$$

где q — прошедший заряд, который равен

$$q = q_1 + q_2 = (0+I_1)t/4 + (I_1+I_2)t/4.$$

Окончательно

$$m = k(2I_1 + I_2)t/4 = 230\ \text{мг}.$$

11. Уравнение движения протона имеет вид

$$F = \Delta p/\Delta t.$$

Так как начальный импульс протона равен нулю, а сила $F = eE$ постоянна, приобретенный протоном импульс равен

$$p = eEt.$$

В классической (нерелятивистской) физике импульс связан со скоростью соотношением

$$p = mv,$$

поэтому скорость протона оказывается равной

$$v = p/m = eEt/m \approx 9{,}6\cdot 10^8\ \text{м/с},$$

что в три с лишним раза больше скорости света ($c = 3\cdot 10^8$ м/с). В релятивистской механике связь p и v иная:

$$p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

и скорость оказывается, конечно же, меньше c:

$$v = c\sqrt{p^2/(p^2+m^2c^2)} =$$

$$= c/\sqrt{1+m^2c^2/p^2} \approx 0{,}95\ c = 2{,}85\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

12. За секунду масса Солнца уменьшается на величину

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 4{,}2\cdot 10^9\ \text{кг} = 4{,}2\ \text{млн. т.}$$

Время, за которое масса Солнца уменьшится на один процент, равно

$$t = 0{,}01M/\Delta m \approx 4{,}9\cdot 10^{18}\ \text{с} \approx 1{,}52\cdot 10^{11}\ \text{лет},$$

что в несколько раз превышает время жизни Вселенной.

13. Энергия основного состояния атома водорода $E_1 = -13{,}6$ эВ. Чтобы удалить электрон из ядра, ему надо сообщить энергию ионизации

$$E_{\text{ион}} = 0 - E_1 = -E_1.$$

Согласно второму постулату Бора и условию задачи,

$$E_{\text{воз}} - E_1 = 8/9E_1.$$

Отсюда получаем

$$E_{\text{воз}} = E_1/9 \approx -1{,}5\ \text{эВ}.$$

14. Запишем ядерную реакцию в виде

$${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{4}_{2}\alpha + {}^{1}_{0}n + {}^{A}_{Z}X.$$

Из законов сохранения числа нуклонов и электрического заряда находим $A=34$, $Z=17$. Отсюда число нейтронов $N=A-Z=17$.

15. Пусть число α-распадов равно k_α, а число β-распадов — k_β. Тогда цепочку радиоактивных превращений можно представить так:

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} \to k_\alpha\cdot {}^{4}_{2}\alpha + k_\beta\cdot {}^{0}_{-1}\beta + {}^{207}_{82}\mathrm{Pb}.$$

Записывая законы сохранения, получаем два уравнения

$$235 = 4k_\alpha + 207,$$

$$92 = 2k_\alpha - k_\beta + 82,$$

откуда находим $k_\alpha = 7$, $k_\beta = 4$. Итак, всего в цепочке 11 распадов.

[redacted]ем системы уравнений

1. (1; 0; 3); (−1; −2; 1). 2. $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$; (3; 1,5). 3. (−5; −2); (−3; −4); (1; 4); (3; 2). 4. (2; 2). 5. (1; 2); (2; 1). 6. (−2; −3); (−3; −2); (2; 3); (3; 2). 7. (2; 3; 4). 8. (3; 1). 9. (−1; 1); (1; 1). 10. $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$. 11. (2; 3). 12. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Указание: исключите z и рассмотрите полученное уравнение как квадратное.

[redacted]сибирский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. В 2 раза. При составлении системы уравнений удобно принять за единицу измерения улова ту порцию рыбы, которую Вася отдал Пете.

2. 4. Указание. Если L — середина BC и $CR:LR = x$, то, из соображений подобия, легко выразить через x искомую сумму площадей. Минимум этой функции на промежутке $x>0$ достигается при $x=2$.

3. $(-1;\ 2]\cup[3;\ 5)$. Удобно воспользоваться методом интервалов. При освобождении от логарифмов обратите внимание на то, что $2-\sqrt{3}<1$. Не забудьте учесть область допустимых значений.

4. $[5/2;\ 3)\cup(3;\ 2+\sqrt[3]{26}\ /2]$. Переформулировка: при каком a ($a\neq 3$, $a>2$) число $(a-2)^3$ входит в множество значений функции, стоящей под логарифмом?

5. $8\sqrt{6}$. Постройте параллелограмм $AB'D'C$ с диагоналями AD', $B'C$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника $A'CD'$ найдите $A'C$, а затем $A'A$. Применение векторной алгебры дает еще более короткое решение.

Вариант 2

1. $\arccos\frac{9}{10}$. Используя формулу для скалярного произведения, найдите максимум искомого угла.

2. $x=\pi k$, $x=(-1)^{k-1}\arcsin\frac{\pi}{6}+\pi k$ ($k\in Z$). Последовательно решая уравнения $2\cos y=1$ и $4\sin x=\frac{5\pi}{3}-y$, не забудьте, что $|\sin x|\leqslant 1$.

3. $AC=12$, $BC=16$. Из подобия треугольников ALC и APL (или из свойства касательной и секущей, проведенных из одной точки) найдите AC. Заметьте, что CL является биссектрисой угла C, и воспользуйтесь ее свойством.

4. $x=-2\pm\frac{1}{\log_2 3-1}$. Заменой $y=(3/2)^{|x+2|}$ уравнение сводится к квадратному.

5. $\sqrt{3}$. Докажите, что прямая PQ' и плоскость $ABA'B'$ параллельны. Тогда искомый радиус — это расстояние между ними, т. е. третья часть высоты треугольника ABC.

Физика

Вариант 1

1. Из условия равновесия следует, что давление между поршнями сохраняется равным внешнему атмосферному давлению. Отсюда по закону Гей-Люссака получаем

$$(S_1+S_2)l/T_0 = 2S_1l/T,$$

т. е.

$$T = 2T_0S_1/(S_1+S_2).$$

2. Максимальное растяжение пружины наступает в момент, когда скорости шариков и одинаковы. Записав законы сохранения импульса и энергии:

$$mv=(M+m)u,\quad mv^2/2=(M+m)u^2/2+Q,$$

где Q — выделившееся количество теплоты, получаем

$$Q = mMv^2/(2(M+m)).$$

3. Напряжения на конденсаторах одинаковы

и равны ЭДС индукции:

$$U_{C_1}=U_{C_2}=\mathscr{E}.$$

Согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}=-\Delta\Phi/\Delta t=-Blv=Blat.$$

По второму закону Ньютона,

$$ma=F-IBl.$$

Ток I, текущий через перемычку, равен сумме токов через конденсаторы:

$$I=I_1+I_2.$$

Заряды на конденсаторах равны

$$Q_{1,2}=\mathscr{E}C_{1,2}=I_{1,2}t.$$

Таким образом, окончательно

$$F=(m+B^2l^2(C_1+C_2))a.$$

4. Угол между начальным и конечным положениями луча равен $\alpha=\omega t=2\pi t/T$, где ω — угловая скорость, T — период вращения Земли. Соответственно, путь, который пройдет пятно за время t, равен $l\sim\alpha L\sim 2\pi tL/T$, где $t=1$ мин, $T=1$ сутки, $L\sim 5$ м — длина комнаты. Таким образом,

$$l\sim 2\pi tL/T\sim 2\text{ см}.$$

5. После растяжения уменьшается взаимный подогрев соседних витков и увеличивается поверхность соприкосновения с воздухом. В результате температура растянутого участка падает, а его сопротивление уменьшается. И хотя ток в цепи несколько увеличивается, из-за резкого роста теплоотдачи нагрев (соответственно и свечение) растянутой части спирали ослабевает. Тепловая мощность на нерастянутом участке при этом увеличивается как за счет увеличения тока, так и за счет роста сопротивления этого участка в связи с повышением температуры.

Вариант 2

1. Пусть цилиндр погрузился в жидкость на глубину x. Тогда из условия несжимаемости жидкости

$$hS_0/2=hS_0/4+x(S_0-S)$$

и из условия равновесия цилиндра

$$h\rho_0=x\rho$$

находим искомую плотность материала цилиндра:

$$\rho_0=\rho/(4(1-S/S_0))\ \text{при}\ \rho_0\leqslant\frac{3}{4}\rho$$

(иначе $x>3h/4$, жидкость будет выливаться из стакана, а задача не будет иметь решения).

2. Искомое время

$$\tau=(d+b)/v_0-t,$$

где t — время пролета после подачи потенциала. Ввиду равноускоренности этого движения, на пути $d+b$ происходило оно со средней скоростью, равной средней арифметической

$$v_{\text{ср}}=(v+v_0)/2=(\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}+v_0)/2,$$

поэтому

$$t=2(d+b)/(v_0+\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}).$$

Тогда

$$\tau=\frac{d+b}{v_0}-t=\frac{d+b}{v_0}\,\frac{\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}-v_0}{\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}+v_0}.$$

3. Пусть деформация правой пружины в момент разрыва нити равна x. Тогда деформация левой пружины равна $L-l$. Критическое условие разрыва $kx=k(L-l)+T$ и закон сохранения энергии

$$mv_{\min}^2/2=kx^2/2+k(L-l)^2/2$$

дают

$$v_{\min}=(L-l)\sqrt{\frac{k}{m}(2-2\alpha+\alpha^2)},$$

$$\text{где}\ \alpha=\frac{T}{k(L-l)}.$$

4. Свет от точечного источника распространяется во все стороны одинаково. В глаз с расстояния l в единицу времени попадает некоторое количество энергии света, пропорциональное площади зрачка $\pi d^2/4$ и обратно пропорциональное квадрату расстояния до источника. Бинокль с размером стекла D собирает весь свет, падающий на площадь $\pi D^2/4$, в глаз. При той же чувствительности глаза доля света, попадающего в глаз с расстояния L, практически должна быть равна доле света, попадающей в глаз с более близкого расстояния l без бинокля:

$$\pi D^2/(4L^2)\approx\pi d^2/(4l^2).$$

Отсюда при $D\approx 5$ см и $d\approx 5$ мм получаем

$$L/l\approx D/d\approx 10.$$

5. В полном термосе с кипятком на пробку изнутри давит насыщенный пар, давление которого равно атмосферному, и поэтому пробка не выскакивает (небольшого трения вполне хватает). При отливе воды в термос входит сравнительно холодный воздух, который нагревается и создает дополнительное давление, кроме несколько уменьшившегося давления насыщенного пара. Это нескомпенсированное добавочное давление и выбивает пробку.

Вариант 3

1. $p'=2p(p-\Delta p)/(2p-\Delta p)$.

2. Из симметрии схемы (см. рис. 6 в условии) потенциалы точек A и B равны между собой. То же для точек C и D. Это означает, что

$$I_{AB}=I_{CD}=0.$$

Через батарейки и резисторы AD и BC ток идет не ответвляясь, поэтому

$$I_{AD}=I_{BC}=2\mathscr{E}/(2(R+r))=\mathscr{E}/(R+r).$$

3. Сила, действующая на заряд q шарика, равна

$$F=q\mathscr{E}/d.$$

Пусть максимальное смещение, которое достигается в момент остановки шарика, равно x. Тогда из условия разрыва пружины

$$T=k(x-x_0)$$

и из закона сохранения энергии

$$2kx_0^2/2+Fx=k(x_0+x)^2/2+k(x_0-x)^2/2$$

находим

$$F = T + kx_0.$$

Окончательно

$$\mathscr{E}_{\min} = \frac{Fd}{q} = \frac{d(T + kx_0)}{q}.$$

4. Пренебрегая суточным движением Земли, непараллельностью солнечных лучей и размером Луны, оценим время затмения как время прохождения Луной отбрасываемой Землей цилиндрической (а не конической) тени:

$$t = d_З/v_Л = d_З T/(2\pi l),$$

где $d_З$ — диаметр Земли, T — период обращения Луны вокруг Земли, l — расстояние от Земли до Луны. Полагая $d_З = 1{,}3 \cdot 10^4$ км, $T = 28$ суток, $l = 4 \cdot 10^5$ км, получаем

$$t \sim 3{,}4 \text{ ч}.$$

5. Для тонкой нити и груза получается обычный конический маятник. Наличие же заметной массы у шнура меняет ситуацию. Во-первых, массивный шнур находится (и «провисает», изгибаясь) в эффективном поле, создаваемом как тяготением, так и вращением. Во-вторых, сказывается и то, что центростремительное ускорение различных участков шнура зависит от расстояния до оси вращения. Все это и приводит к изгибу шнура. (Попытка точного описания ситуации приводит к очень сложному уравнению.)

[redacted]овский авиационный институт

Математика

Вариант 1

1. 2.

2. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n,\ n \in Z$.

3. $[0;\ 1) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ 4] \cup [6;\ 11)$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\log_a c \cdot \log_b d = \log_b c \cdot \log_a d$, после чего приведите неравенство к виду

$$\log_{0,2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 \cdot \left(\log_2 \frac{(x-2)(x-1)}{x+3} - \log_2 \frac{(x-2)(x-1)}{11-x}\right) \geqslant 0.$$

4. См. рис. 2. Указание. Множество точек D, для которых $ADC = 30^\circ$ — это две дуги окружностей, стягиваемые хордой AC. Множество точек D, для которых $\angle ADC < 30^\circ$, — это область вне построенных дуг.

Аналогично строится множество точек D, для которых разность величин $\angle BDC$ и $\angle ADC$ больше 60°. Эта разность равна величине угла BDA, поэтому граница соответствующей области состоит из двух дуг окружностей, стягиваемых хордой AB. При этом треугольник ABD_2 — равносторонний. Вершины углов BDA, для которых $\angle BDA > 60^\circ$, лежат внутри построенной «восьмерки». Искомая область, т. е. множество точек D, удовлетворяющих одновременно обоим условиям, показано розовым цветом.

5. 67. Пусть m и n — количества телевизоров в контейнере и в вагоне соответственно. Из

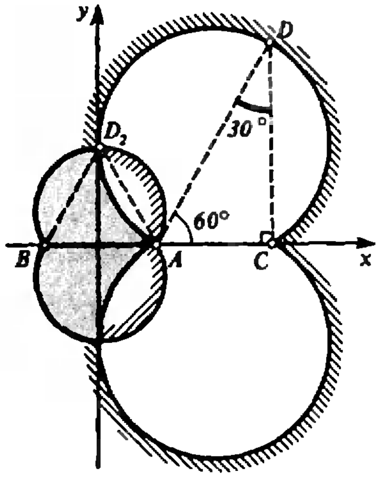


Рис. 2.

условия следует, что числа $7n+5$ и $12n-1$ делятся на m. Но тогда на m делится и число

$$12(7n+5) - 7(12n-1) = 67.$$

Из простоты числа 67 следует, что $m = 67$. Нетрудно доказать, что существует n такое, что $7n+5$ и $12n-1$ делятся на 67.

6. 121. Указание. Сечение сферы плоскостью, проходящей через ребра BC и HC,— окружность, касающаяся ребра BC в точке B и пересекающаяся с HC в точках M и K. По условию, $CM = 2x$, $CK = 3x$, $CH = 5x$. По теореме о квадрате касательной, $BC^2 = CM \cdot CK$. Теперь легко найти высоту пирамиды, а затем и объем.

Вариант 2

1. $1/2$. Указание. По условию, $ac = b^2$.

2. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. $\left(\frac{1}{4};\ 2 - \frac{\sqrt{47}}{4}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{47}}{4};\ \frac{15}{4}\right)$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 16|x^2 - 4x + 1| < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ 16x^2 + 16 < 1. \end{cases}$$

4. $2 \cdot 13 \cos 15^\circ = \frac{13(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$. Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, O — центр описанной около него окружности, OM и OK — перпендикуляры из точки O на хорды AC и BD соответственно. Пользуясь тем, что треугольники AOM и OKD равны, докажите, что наибольший угол, под которым некоторая сторона четырехугольника может быть видна из точки O, равен 150°.

5. 2744; 371; —112; —1189; 119; —364; —2737; —19204. Указание. Поскольку $2744 = 2^3 \cdot 7^3$, из условия задачи получаем уравнение:

$$n(2a + 7(n-1)) = 2^4 \cdot 7^3.$$

Здесь a — первый член прогрессии, а n — количество членов.

Если n — четно, то $2a + 7(n-1)$ — нечетно и поэтому $n = 16k$, где k — делитель числа 7^3. Отсюда находим все возможные значения для k, а вместе с ними и все значения a.

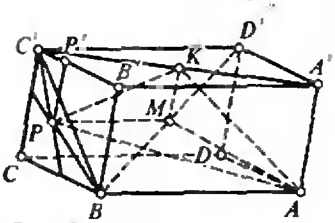


Рис. 3.

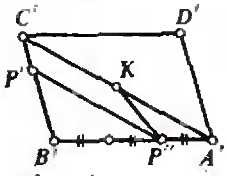


Рис. 4.

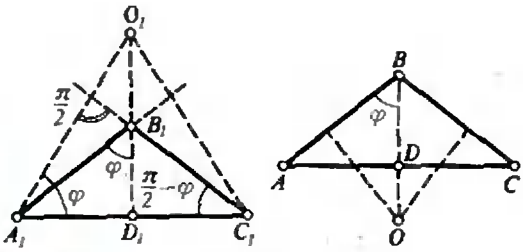


Рис. 5.

Аналогично рассматривается случай нечетных n.

6. $72V$. Указание. Объем треугольной пирамиды не меняется, если одну из вершин передвинуть параллельно противолежащей грани, а остальные вершины оставить на месте. Точку P передвинем на ребро $B'C'$ параллельно ребру KM, т. е. параллельно грани AKM. Затем (см. рис.) точку A заменим точкой A' ($AA' \parallel KM$). Из теоремы Фалеса следует, что $C'P' : P'B' = 1 : 2$. Точку P' можно сдвинуть на ребро $A'B'$ параллельно диагонали $A'C'$, причем $A'P'' : P''B' = 1 : 2$. Объем пирамиды $AMKP$ равен объему пирамиды $A'MKP''$. Площадь треугольника $A'P''K$ (рис. 4) составляет $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ площади параллелограмма $A'B'C'D'$, а высота пирамиды, опущенная из вершины M, вдвое короче соответствующей высоты параллелепипеда. Поэтому объем пирамиды составляет $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{72}$ объема параллелепипеда.

Физика

Вариант 1

1. $\Delta t = t\left(\sqrt{6+5l/L} - \sqrt{5(1+l/L)}\right) = 1{,}02$ с.
2. $a = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/(2m) - \mu g = 2{,}64$ м/с^2; $T = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/2 = 42{,}55$ Н.
3. $C = R/2 = 4{,}16$ Дж/(моль · К), где $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.
4. Напряженность поля направлена под углом 45° к горизонту и равна $\sigma/(\sqrt{2}\varepsilon_0) = 80$ В/м, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.
5. $r = 0$.
6. $\lambda = \dfrac{c}{\nu_0 + eU/h} = 2{,}26\cdot10^{-7}$ м, где $c = 3\times10^8$ м/с — скорость света, $h = 6{,}63\times10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Вариант 2

1. $r = t\sqrt{v_0^2 - v_0\sin\alpha_0\cdot gt + g^2t^2/4} = 3{,}1\times10^3$ м, где $t = v_0(\sin\alpha_0 - \cos\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha)/g = 37{,}3$ с.
2. $N = pV/(2kT) = 6{,}04\cdot10^{21}$, где $k = 1{,}38\times10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.
3. $h = \left(L+l+H - \sqrt{(L+l+H)^2 - 4Ll}\right)/2 = 12{,}1$ см.
4. $n = 1 + 2\varepsilon_0 SA/(q^2 d) = 3$.
5. $q = BS/R = 10^{-4}$ Кл.
6. $v_{min} = \sqrt{3hR/(2m)} = 1{,}87\cdot10^6$ м/с, где $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $R = 3{,}2\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ — постоянная Ридберга, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{6}(6n-1)$; $\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6} + \frac{\pi(2n+1)}{2}$, $n \in Z$.

Указание. После замены $y = \frac{\pi}{3} - x$ уравне-

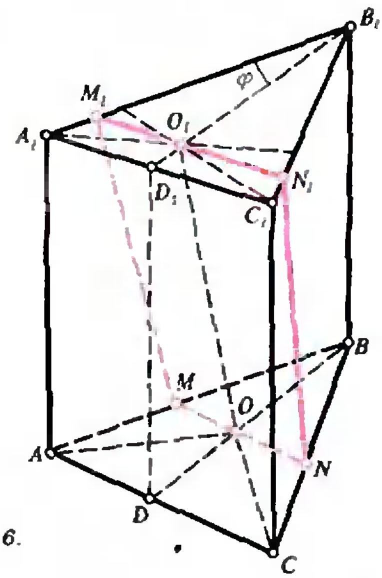


Рис. 6.

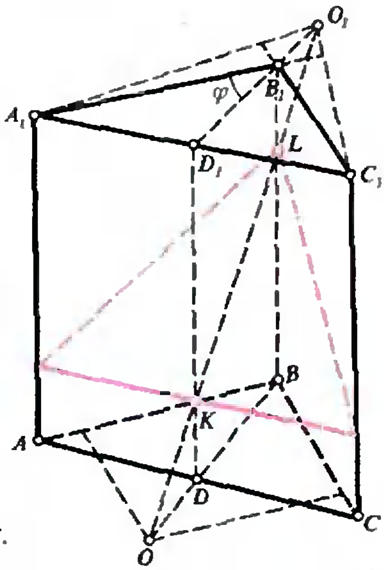


Рис. 7.

ние приводится к виду $4\cos y=-3\cos 3y$, или $\cos y=-3\cos 3y-3\cos y=-6\cos y\cdot\cos 2y$.

2. 9109. Указание. Пусть $A=xyzt$, где x, y, z, t — цифры. Из условия после преобразований получим уравнение $111(x-t)+10(y-z)=10$, откуда $x=t$, $y-z=1$.

3. $(3;+\infty)$ при $a\leqslant 2$;
$(2;a)\cup(3;+\infty)$ при $2<a\leqslant 3$;
$(2;3)\cup(a;+\infty)$ при $a>3$

Указание. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-a>0,\\ \log_3(x-2)>0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases} x-a<0,\\ \log_3(x-2)<0.\end{cases}$$

4. $$\frac{d^2\sin\varphi\sin\alpha(1+2\cos 2\varphi)}{8\cos^3\varphi}\times$$
$$\times\sqrt{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\sin^2\alpha(1-2\cos 2\varphi)^2}$$
при $0<\varphi<\pi/4$;

$$\frac{1}{4}\,d^2\sin 2\alpha\sin 2\varphi\,\frac{\sqrt{4\cos^2\varphi+\mathrm{tg}^2\,\alpha(2\sin\varphi-\cos 2\varphi)^2}}{2\sin\varphi-\cos 2\varphi}$$
при $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$.

Указание. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, O_1 — точка пересечения высот равного ему треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 5). Если $0<\varphi<\pi/4$, треугольник ABC остроугольный и точки O и O_1 лежат внутри треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, так что в этом случае сечение является трапецией (рис. 6). При $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$ треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ либо прямоугольные (при $\varphi=\pi/4$), либо тупоугольные, а сечение будет треугольником (рис. 7).

В первом случае $AB=d\sin\alpha$, $BB_1=d\cos\alpha$. Пусть O_2 — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 8). Тогда $BO=AB/(2\cos\varphi)$, $BO_2=BC\times\cos 2\varphi/\cos\varphi$ и $OO_2=|BO-BO_2|=d\sin\alpha|1-2\cos 2\varphi|/(2\cos\varphi)$. Высоту OO_1 трапеции находим из соотношения

$$OO_1^2=OO_2^2+BB_1^2.$$

Для вычисления оснований трапеции — отрезков MN и M_1N_1 — воспользуйтесь подобием соответствующих треугольников:

$$MN=AC\cdot\frac{BO}{BD};\quad M_1N_1=AC\cdot\frac{BO_2}{BD}.$$

Если $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$, сечение — треугольник с основанием, равным $AC=2d\sin\alpha\sin\varphi$, и высотой KL. При вычислении KL нужно, как и раньше, найти $OO_2=O_2D+OB-BD$ (рис. 9), заметить, что $KL=BD/\cos\gamma$, где γ — угол наклона секущей плоскости к плоскости основания и воспользоваться тем, что $\mathrm{tg}\,\gamma=B_1B/OO_2$.

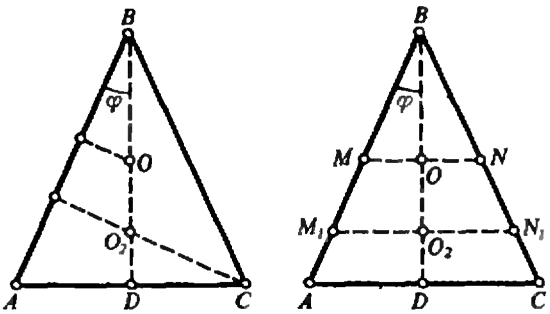


Рис. 8.

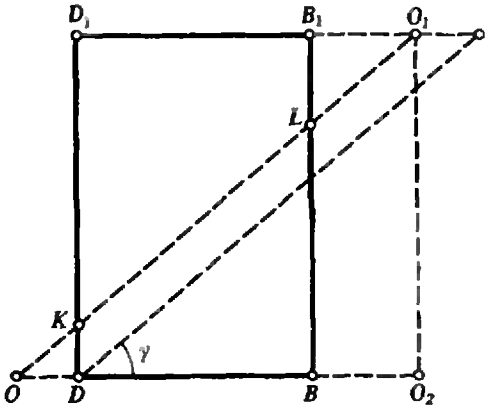


Рис. 9.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{4-\sqrt{17}}{\sqrt{2}}+\pi k$, $k\in Z$.

2. 60 ч.

3. $x_1=-(c+63)$; $x_2=1-c$. Оба корня положительны при $c<-63$.

4. Если $0<\gamma\leqslant\arccos{}^1/_3$, имеются два существенно различных случая: $R_1=\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3\cos\gamma-1}{\cos\gamma}}$ (сечение параллельно плоскости основания) и $R_2=h\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{ctg}\,\gamma\cdot\mathrm{tg}\,\gamma/2}{\sqrt{2+\mathrm{ctg}^2\,\gamma}}$ (сечение параллельно боковой грани). Если $\arccos{}^1/_3<\gamma<\pi/2$, остаются только сечения, параллельные боковым граням, при этом $R=R_2$.

Физика

Билет 1

1. Полное ускорение $\vec a$ складывается из нормального $\vec a_n$ и тангенциального $\vec a_\tau$:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}.$$

Нормальное ускорение равно $a_n=v^2/R$, а скорость тела v при постоянном тангенциальном ускорении линейно растет со временем: $v=a_\tau t$. В результате получаем

$$a=\sqrt{((a_\tau t)^2/R)^2+a_\tau^2}=a_\tau\sqrt{1+(a_\tau t^2/R)^2}.$$

2. Средняя энергия атома аргона $\bar E$ связана с температурой T соотношением $\bar E={}^3/_2kT$, где k — постоянная Больцмана. Температуру найдем из уравнения Клапейрона — Менделеева: $T=pV/(\nu R)$. Тогда

$\bar E={}^3/_2kpV/(\nu R)={}^3/_2pV/(\nu N_A)=1{,}2\cdot 10^{-23}$ Дж, где $N_A=6\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро.

3. Потенциал шарика возрастает до тех пор, пока кинетическая энергия самых быстрых вылетающих из него фотоэлектронов достаточна для того, чтобы они смогли преодолеть возникающий задерживающий потенциал и удалиться от шарика на бесконечно большое расстояние. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта запишется в виде

$$hc/\lambda = A + e\varphi_{max},$$

откуда находим искомую работу выхода A:

$$A = hc/\lambda - e\varphi_{max} = 4{,}36 \text{ эВ}.$$

4. Поскольку сила, действующая на протон со стороны магнитного поля, не изменяет величину скорости v, а начальная скорость протона равна нулю, закон сохранения энергии — для момента, когда протон находится в точке A, и для начального момента — запишется в виде

$$mv^2/2 - eEh = 0.$$

Второй закон Ньютона для протона в точке A, в проекциях на ось Y, выглядит так:

$$-ma = eE - evB.$$

Таким образом, ускорение протона равио равно

$$a = (e/m)(B\sqrt{2(e/m)Eh} - E) = 10^{12} \text{ м/с}^2.$$

Билет 2

1. На рисунке (см. рис. 2 в статье) представлены графики изобарных процессов. Давление газа в состоянии *1* меньше, чем в состоянии *4*.

2. На частицу в магнитном поле действует сила Лоренца $F = |q|vB$, сообщающая ей центростремительное ускорение $a = v^2/R = F/m = |q|vB/m$. Отсюда

$$|q| = mv/(BR).$$

Правило нахождения направления силы $\vec{F}$ дает ответ на вопрос о знаке заряда — он отрицательный.

3. Ускорение системы, состоящей из нити и обоих тел, равно

$$a = F/(m_1 + m_2 + m).$$

Тело A движется под действием силы натяжения нити в точке соединения с этим телом, поэтому

$$T_A = m_2 a = Fm_2/(m_1 + m_2 + m).$$

Ускорение тела B обусловлено действием на него силы F и силы натяжения нити в точке соединения с ним:

$$m_1 a = F - T_B,$$

следовательно,

$$T_B = F - m_1 a = F(m_2 + m)/(m_1 + m_2 + m).$$

4. Пользуясь свойством обратимости хода лучей, точку S можно рассматривать как мнимое изображение. Тогда формула линзы запишется в виде

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{l} = D,$$

где d — расстояние от линзы до точки пересечения лучей, преломившихся в линзе. Отсюда

$$d = l/(1 + Dl) = 13{,}6 \text{ см}.$$

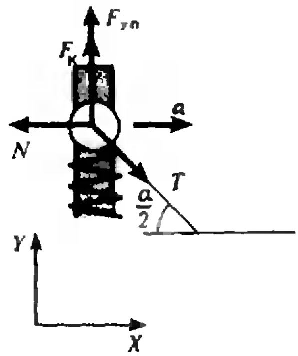


Рис. 10.

Билет 3

1. Уравнение движения тела, брошенного под углом к горизонту, имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \vec{g}t^2/2,$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор тела в произвольный момент движения t, $\vec{r}_0$ — начальный радиус-вектор, $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела.

2. Внутренняя энергия ν молей одноатомного газа связана с его температурой соотношением

$$U = {}^3/_2 \nu RT.$$

Теперь из уравнения Клапейрона — Менделеева легко найти давление газа:

$$p = \nu RT/V = 2U/(3V) = 1 \text{ атм}.$$

3. Лучи, преломившиеся в линзе и отразившиеся от зеркала, вновь преломляются в линзе. Поэтому оптическая сила системы «линза + + зеркало» равна удвоенной оптической силе линзы, а уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}.$$

Отсюда получаем

$$f = Fd/(2d - F) = -20 \text{ см}.$$

Изображение мнимое и находится на расстоянии 20 см от линзы.

4. Запишем второй закон Ньютона для системы в целом:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

а также для одной из муфточек (рис.10):

$$m_м\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{уп} + \vec{N} + \vec{F}_К,$$

где $m_м$ — масса муфточки, $\vec{T}$ — сила натяжения нити, $\vec{F}_{уп}$ — сила упругости пружины, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции стержня, $\vec{F}_К$ — сила кулоновского взаимодействия муфточек. Запишем эти уравнения в проекциях на оси X и Y соответственно:

$$ma = F,$$
$$0 = -T\sin(\alpha/2) + k(l_0 - l) + q^2/(4\pi\varepsilon_0 l^2),$$

где l — расстояние между муфточками. Заметим также, что силы T и F связаны соотношением

$$F = 2T\cos(\alpha/2),$$

а величина l может быть выражена через l_0:

$$l = l_0 \sin(\alpha/2).$$

Окончательно получаем

$$a=(2kl_0/m)\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2)\,(1-\sin(\alpha/2)+$$
$$+q^2/(4\pi\varepsilon_0 kl_0^3\sin^2(\alpha/2)))=0{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

1. $l=(v+Mu/(M+m))t\approx 4$ м.
2. $h=at^2/(2(1+a/g))=170$ м.
3. $\varrho=m(p_1-p_2)/(S(p_1l_1-p_2l_2))=400$ кг/м^3.
4. $f'=f+mRT\cdot 100\,\%/(MVp_н)\approx 63\,\%$.
5. $$v=\frac{\Delta x}{\sqrt{2h/(g-qE/m)}-\sqrt{2h/(g+qE/m)}}\approx 1{,}1\ \text{м/с}$$
6. $T=3mg+2qE=5\cdot 10^{-2}$ Н.
7. $\mathscr{E}=\sqrt{NR/(k(1-k))}=625$ В; $N_1=N(R-k(R-R_1))/R_1=242$ Вт.
8. $$q=\frac{|B_т-B_в|\,ab}{R+2\varrho(a+b)/S}\approx 10^{-7}\ \text{Кл}.$$
9. $x=2d\sin\alpha/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\approx 2{,}1$ см.
10. $q_{max}=(hc/\lambda-A)\varepsilon_0 S/(ed)\approx 8{,}85\cdot 10^{-11}$ Кл, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Московский институт стали и сплавов

Вариант 1

1. 8. 2. Нет решений. 3. -1. 4. 13. 5. 8. 6. 2. 7. 5. 4. 8. 4. 9. 2. 10. 0,5. 11. 0,75. 12. 1.

Вариант 2

1. 0,4. 2. 3. 3. 3. 4. -1. 5. 3. 6. 6. 7. 5. 8. 1. 9. 0. 10. 6,25. 11. 1. 12. 0,2.

Вариант 3

1. -2. 2. $-0{,}28$. 3. -3. 4. 8. 5. 8. 6. -1. 7. 2. 8. -1. 9. 2. 10. 37,5. 11. 0,125. 12. 8.

Рейтинговый экзамен по физике в МИСиСе

Тур 1

1. $l=29$ м.
2. $v=18$ м/с.
3. $F=20{,}8$ Н.
4. $\mu=0{,}105$.
5. $h=1600$ км.
6. $v=4{,}5$ м/с. Указание. В течение того времени, когда на тележку сыпется песок, ускорение тележки изменяется по линейному закону.

Тур 2

1. $T_н/T_к=0{,}5$.
2. $p_1/p_2=60$.
3. $\alpha=1{,}5\,\%$.
4. $W=3$ эВ. Указание. Бо́льшая часть энергии затрачивается на процесс испарения.
5. $T=768$ К.
6. $n=2{,}4$.

Тур 3

1. $\varphi_0=-890$ В.
2. $U_1=6$ В.
3. $F=0{,}02$ Н.
4. $U=45$ В.
5. $F=0{,}1$ Н.
6. $v=9{,}8$ м/с.

Квант для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. Заметим, что количество партий, выигранных каждым участником, равно количеству всех партий, в которых выиграли черные, поэтому *все участники выиграли по одинаковому числу партий.*
2. Такими словами являются, например, колокол и водопровод.
3. $1609\times 6=9654$. Указание: начните поиск решений с буквы И.
4. Галя весит 50 кг, Света — 40, Маша — 30, Даша — 20 и Катя — 10.
5. Так как AM и CN — высоты, то точки M и N *лежат на полуокружности с диаметром* AC и центром в точке Q (рис. 11). Следовательно, отрезки QN и QM равны как радиусы этой окружности. Угол NAM равен 30°, как второй острый угол прямоугольного треугольника AMB с углом ABM, равным 60°. Но угол NQM опирается на ту же дугу, что и угол NAM, но является центральным, а потому вдвое больше его, т. е. равняется 60°. Из этих утверждений следует, что треугольник NMQ — равносторонний.

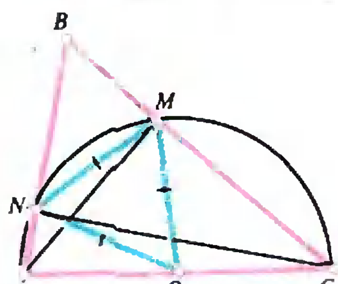


Рис. 11.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Необходимо прикоснуться концом одного стержня к середине другого (в виде буквы T).
2. Сначала магнит создает в нижних концах иголок одноименные магнитные полюса, что вызывает отталкивание иголок друг друга. Когда магнит приближается на достаточно малое расстояние, взаимодействие между ним и каждой из иголок становится сильнее взаимодействия между иголками, и они опускаются, притягиваясь к магниту.
3. Да, на концах стержня будут одноименные полюса.
4. Возникнет. Электроны сверхпроводящего кольца не будут увлечены движением, а положительные ионы кристаллической решетки — будут, что и создаст магнитное поле.
5. Нулю.
6. В проводниках объемный электрический заряд равен нулю, поэтому проявляются только магнитные силы. В случае катодных пучков действуют и магнитные, и электрические силы, но преобладают силы отталкивания между *одноименными зарядами.*
7. Витки пружины представляют собой параллельные проводники, по которым течет ток в

одном направлении. При прохождении тока витки притягиваются друг к другу, что вызывает размыкание цепи. Магнитное поле исчезает, пружина распрямляется, нижним концом замыкает цепь, и все повторяется.

8. Провод обовьется вокруг магнита.

9. Сила взаимодействия равна нулю, так как направление кругового тока совпадает с направлением линий магнитной индукции прямолинейного тока.

10. Сила взаимодействия уменьшится.

11. Кольцевой ток, текущий в плоскости, близкой к экваториальной.

Микроопыт

Магнитное поле Земли на расстояниях порядка длины магнитной стрелки практически однородно, поэтому, действуя на стрелку, может создавать только вращающий момент. Поле постоянного магнита на этих же расстояниях неоднородно, поэтому вызывает не только вращательное, но и поступательное движение стрелки.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 11 за 1991 г.)

7. Это число 1,128.

8. Вот одно из решений. Разрежем прямоугольник так, как показано на рисунке 12, и, перегнув бумагу, положим коричневые прямоугольники на желтые. В результате получается двухслойная развертка куба.

9. Пусть порция мороженого стоит x копеек. Так как Пете хватило рубля на две порции, то $x \leqslant 50$. Если бы у Коли было не меньше 4-х рублей, то ему хватило бы денег на 8 порций, а он смог купить только 6. Следовательно, у него было 2 или 3 рубля. Рассмотрим оба случая.

Пусть у Коли 2 рубля, и он может купить 6 порций мороженого, но не может купить 7 порций. Тогда порция мороженого стоит больше 200/7 копеек, но не меньше 200/6 копеек, т. е. $29 < x < 33$. Отсюда $319 < 11x < 363$, следовательно, у Васи было не меньше 4-х рублей. Но в этом случае у него осталось бы не меньше 37 копеек, а этого хватило бы еще на одну порцию мороженого, что противоречит условию. Итак, у Коли было 3 рубля, поэтому выполнены неравенства: $300/7 \leqslant x < 300/6$, откуда $43 < x < 50$. Если $x \geqslant 46$, то $506 \leqslant 11x < 550$, откуда следовало бы, что у Васи не меньше 6 рублей. Но тогда он смог бы купить не меньше 12 порций мороженого. Следовательно, $43 < x \leqslant 45$ и $473 < 11x \leqslant 495$, т. е. у Васи было 5 рублей, а вместе с Колей — 8 рублей, причем на 18 порций этого не хватало. Поэтому $x > 800/18 = 44{,}4\ldots$, откуда $x = 45$ копеек.

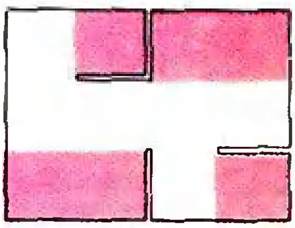


Рис. 12.

Квант

Главный редактор — академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик С. Новиков

Заместители главного редактора: В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Номер подготовили
Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич, С. Коновалов, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-56-57

Сдано в набор 29.12.91. Подписано к печати 13.03.92. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,73. Тираж 89 149 экз. Заказ 2066. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

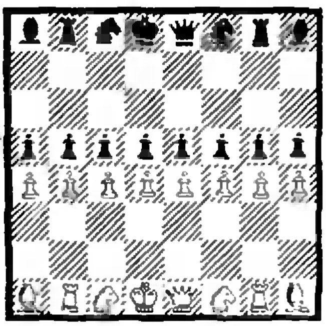
КОРОТКАЯ ЖИЗНЬ РЕКОРДОВ

Мы получаем множество писем с решениями заданий, предложенных ранее. Читатели рассказывают о поставленных ими рекордах. Вот наиболее интересные сообщения.

В «Кванте» № 7 за 1991 год приводился быстрый мат при условии, что ходы наикратчайшие. И. Верещагин, который придумал его, был уверен, что это самый быстрый мат. Но В. Хуторной из Твери побил рекорд на полхода: **1. d3 e6 2. d4 e5 3. Фd2 Кре7 4. Фd3 Кре6 5. Фе3 Кре7 6. Фе4 Кре6 7. Ф:е5×.** Итак, белые матуют на полхода быстрее, чем черные. При этом использованы всего четыре фигуры: ферзь и пешка у белых, король и пешка у черных.

В. Хуторной предложил еще один рекорд. Вот самый быстрый мат при условии, что ходы каждой фигуры кратчайшие: **1. e3 f6 2. Се2** (если король, ферзь, ладья и пешка могут сделать ход длиной 1, то у слона кратчайший ход $\sqrt{2}$) **2...f5 3. Сf3 g6 4. Сg4 g5 5. Сh5×.**

В шестом номере нашего журнала за 1991 год рассматривалась следующая задача.



Какое наименьшее число перестановок фигур надо осуществить, чтобы получить начальное положение для игры?

В журнале был дан ответ: 38 перестановок. Однако Г. Меликян из Еревана сумел побить этот рекорд, и даже дважды...

Займемся только белыми фигурами. Для перестановки короля и ферзя требуется три «хода»: ферзь становится на любое поле доски, его место занимает король, и затем на свое законное место d1 возвращается ферзь. Однако для расстановки остальных белых фигур требуется не восемь, а семь «ходов». Вот один из вариантов: 1. Сa1—b2 2. Лb1—a1 3. Кc1—b1 4. Сh1—c1 5. Лg1—h1 6. Кf1—g1 7. Сb2—f1. Для перестановки пешек требуется 8 «ходов». Таким образом, белые фигуры расставляются по местам за 18 перестановок, столько же «ходов» требуется черным. Итого 36.

Поскольку в задании не сказано, кто с какой стороны играет, рекорд можно улучшить, если белые и черные фигуры поменять местами (белые расставить вверху диаграммы, а черные — внизу). В этом случае нужно всего 35 «ходов»: 1. Сa1—b2 2. Лb8—a1! 3. Кc1—b8! 4. Сa8—c1! 5. Лb1—a8! и т. д.

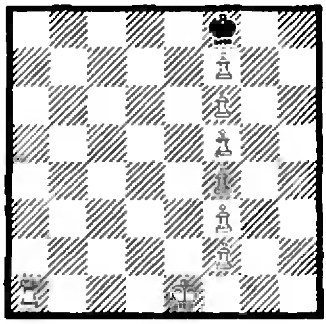
Испанский король Карлос I, правивший в середине XVI века, поощрял увлечение шахматами среди своих придворных. Но, будучи человеком, облеченным абсолютной властью, он считал себя вправе вносить изменения в правила игры. Как утверждают историки, в 1547 году он подписал указ «о голом короле», согласно которому если у кого-то из игроков остался один король, то партнер не имеет права атаковать его и обязан тут же соглашаться на ничью.

Вот позиция (ее автор — известный рекордсмен Б. Сидоров), которая наводит на мысль, что шахматное нововведение Карлоса имеет свой резон. Конечно, если у вас остался одинокий король, придется расстаться с мыслью о победе и... смириться с ничьей.

Белые: **Крg2.** Черные: **Крd1, Фb1, Лb2, Лc2, Сa2, Сc1, Кa1, Кa4,** пешки: **b3, b5, b6, c3, c4, c5, d2, f2.** Ничья.

1. Крf1! b4 2. Кр:f2 (только теперь можно взять пешку!) **2...b5 3. Крf1 Кb6 4. Крf2 Кd5 5. Крf1 Кe3+ 6. Крf2 Кg4+ 7. Крf1 Кh2+ 8. Крf2 Кf3 9. Крf1!** с ничьей. Если бы на первом ходу белые поспешно взяли пешку — 1. Кр:f2?, то в рассмотренном варианте в ответ на 5. Крf2 последовало бы 5...Кe3!, и клубок черных фигур мгновенно распутывался.

Две необычные позиции получили мы от А. Шурякова из Кривого Рога.



Мат в 9 ходов

1. Лa8+ Кр:f7 2. Лh8! Кр:f6 3. Лh7 Кр:f5 4. Лh6 Кр:f4 5. Лh5 Кр:f3 6. Лh4 Крg2 7. Крe2 Крg1 8. Крf3 Крf1 9. Лh1×. В задаче занятная начальная позиция, но есть и еще одна особенность: белая ладья побывала в процессе решения во всех четырех углах доски! Может быть, кто-нибудь из читателей придумает задачу с меньшим числом фигур, где ладья ставит мат (в любое число ходов), совершая такое же путешествие «по углам»?

А вот вторая его позиция: **Белые: Крa4, Лf8, Сf4. Черные: Крf1, пешки a2, a5, c2, c5, e2, e5, g2, g5. Мат в 34 хода.**

1. Сg3+ 2. Сf2+ (если ход черного короля вынужденный, то для сокращения текста мы его опускаем) **Крf1 (2...Крh1 3. Лh8×) 3. Сd4+ 4. Сc3+ 5 Лd8+ 6. Сd2! Крd1 (6...Крb2 7. Лb8+ Крa1 8. Сc3×) 7. С:a5+ 8. Сd2+ 9. С:g5+ 10. Сh4+ 11. Лf8+ 12. Сf2+ 13. С:c5+ 14. Сb4+ 15. Лd8+ 16. Сa3+! 17. Лb8+ 18. Сb2+ 19. С:e5+ 20. Сf4+ 21. Лd8+ 22. Сg3+ 23. Лf8+ 24. Сf2+ 25. Сc5+ 26. Сb4+ 27. Лd8+ 28. Сa3+ 29. Лb8+ 30. Сe7! c1Ф 31. Сf6+ Фb2 32. Л:b2 e1 (g1) Ф 33. Лb8+ 34. С:Ф×.**

Черные пешки образуют своего рода клетку, в которую заключен белый слон. Интересно было наблюдать, как он расшатывает эту клетку и в конце концов вырывается на волю!

Е. Гик

1 р. 10 к.

Индекс 70465

Хотите, чтобы английская королева вам улыбнулась? На дворе март, месяц женского праздника 8 Марта и редакция решила подарить всем читательницам и читателям журнала улыбку королевы Елизаветы.

Для того чтобы получить наш подарок, проделайте следующее. Аккуратно согните обложку журнала по трем вертикальным пунктирным линиям и слегка сдвиньте края листа к центру так, чтобы получилась М-образная складка. Затем наклоните лист «от себя», и чудо совершится — королева с 20-фунтовой английской банкноты улыбнется лично вам. Осторожно! Не поворачивайте лист «на себя». В этом случае королева посмотрит на вас весьма неодобрительно. Кстати, ни с одной советской банкноты этот фокус не проходит. Их персонаж никогда не поворачивает к нам свое лицо, а смотрит вбок.

Надеемся, что вам не составит труда разобраться в физике фокуса. На первый взгляд кажется, что при улыбке у королевы приподнимаются уголки губ. На самом деле, при наклоне листа бумаги уголки губ остаются на своих местах, а середина губ спускается вниз, создавая эффект улыбки.